

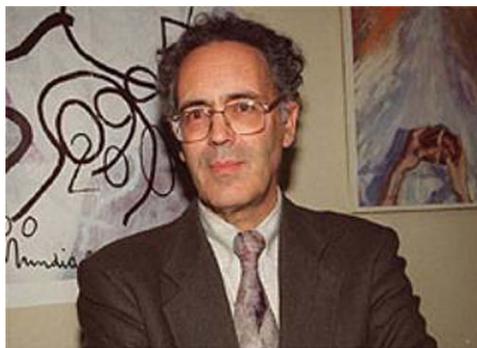
Miguel de Guzmán, educador

por

María Luz Callejo

Hay personas que encontramos en nuestra vida, nos dejan huella, y ya no volvemos a ser los mismos. El encuentro de José Carrillo Yáñez y Santiago Fernández con Miguel de Guzmán les ha dejado huella. Ellos, entre otros y otras, han sido testigos privilegiados de la influencia que Miguel ha tenido tanto en la investigación en didáctica de las matemáticas como en la educación matemática en secundaria, dos de las líneas que impulsó y apoyó decididamente, como exponen en sus colaboraciones para este número. Pepe y Santiago forman parte de la primera generación de “herederos” del pensamiento y la acción de Miguel de Guzmán, que ha dado sus frutos en programas, en libros de texto, en la actualización del profesorado y en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos y alumnas. Estos frutos han traspasado ya generaciones y fronteras geográficas, como muestra el caso del profesor portugués Jorge Cruz.

La extraordinaria calidad humana de Miguel unida a su gran prestigio profesional en el campo de la matemática ha hecho posible tender puentes entre distintas comunidades que se dedican a la matemática, ha contribuido a cambiar la visión formalista de esta ciencia rescatando los aspectos más formativos y motivadores, ha puesto de relieve la importancia de la educación matemática para la formación integral de los niños y jóvenes y para el progreso de los pueblos, y ha impulsado proyectos en línea de solidaridad.



Pero la tarea no está acabada y los aspectos que Miguel comenzó señalando en los años 80 como necesitados de cambio y otros que surgieron después, como consecuencia de los importantes cambios sociales, culturales y tecnológicos que se han producido en nuestra sociedad, así como de la prolongación de la educación obligatoria hasta los 16 años son, para quienes creemos en la fuerza transformadora de la educación, una invitación a implicarnos y comprometernos en su mejora.



Arriba: Miguel de Guzmán, Nekane Aguirre (Ex-directora de Innovación educativa del Departamento de Educación del Gobierno Vasco), Inaxio Oliveri (Ex-Consejero de Educación del Departamento de Educación del Gobierno Vasco) y Javier Duoandikoetxea (Bilbao, 2000).

Abajo: Miguel de Guzmán con varios profesores entre los que se encuentra M^a Jesús Luelmo y Ángel Ramírez (Bilbao, 2000).



Miguel de Guzmán y la Educación Matemática

por

Santiago Fernández Fernández

En primer lugar quiero agradecer a los responsables de LA GACETA DE LA RSME por haberme invitado a escribir esta reseña dedicada a Miguel de Guzmán. Ello me da la oportunidad de rendir tributo público al profesor y amigo de cuya enseñanza y estímulo he sido yo, como tantos otros, beneficiario directo.

EVOCACIÓN

Quiero empezar por recordarte como compañero y amigo. Dice una famosa balada:

*Cuando un amigo se va,
queda un tizón encendido,
que no se puede apagar,
ni con las aguas de un río*

Aún recuerdo la primera vez que tuve el placer de saludarte. Era verano (1988) y en la hermosa ciudad de Salamanca dictabas una conferencia sobre el papel del juego en las matemáticas, allí estabas contagiándonos de tu pasión por esta ciencia.

La sala estaba repleta de profesores de enseñanza primaria y secundaria. Tú ibas presentando, uno tras otro, una serie de juegos sumamente interesantes; lo hacías sin prisas, las ideas fluían como las aguas tranquilas de un río al llegar a la desembocadura. Te brillaban los ojos y tenías unas enormes ganas de encandilar al público; desde luego lo conseguiste. Al finalizar la ponencia te solicité una dedicatoria en uno de tus sugerentes libros: *Aventuras matemáticas*. Aunque no me conocías me trataste como a un colega, con cariño y afecto. Estuvimos hablando un buen rato sobre la enseñanza de las matemáticas, de sus virtudes y defectos, pues vivíamos un periodo de reformas educativas. Posteriormente comimos juntos y seguimos

...ibas presentando, uno tras otro, una serie de juegos sumamente interesantes; lo hacías sin prisas, las ideas fluían como las aguas tranquilas de un río al llegar a la desembocadura. Te brillaban los ojos y tenías unas enormes ganas de encandilar al público... Nos ofreciste un ramillete de problemas bellos, sugerentes, que en tus manos eran como piedras preciosas.

hablando de tu ponencia, de tus proyectos, de tus ilusiones. Ahora me doy cuenta que estabas iniciando un camino que a la postre daría sus frutos. Para mí fue un encuentro emocionante.

Posteriormente tuve la enorme suerte de coincidir contigo en muchos acontecimientos matemáticos: Jornadas, Congresos, Cursos, etc. Entre ellos, guardo un especial recuerdo del año 1996 cuando coincidimos en Argentina, impartiendo un seminario que anualmente celebra la Olimpiada Matemática Argentina (OMA). A lo largo de los diez días que estuvimos juntos pude comprobar la admiración que todo el mundo te tenía.

Siempre estabas presto a acudir allí donde te llamaran, no tenías pereza. Yo mismo solicité tu presencia en más de diez ocasiones: Cursos sobre la resolución de problemas, el papel del juego en la enseñanza de las matemáticas, la belleza de la geometría, el papel de la visualización en matemáticas.

La primera vez que acudiste a nuestra llamada fue el año 1989. A lo largo de hora y media nos hablaste de la importancia de la resolución de problemas, de cómo introducirlos en el aula, qué tipo de problemas era conveniente presentar, cómo mejorar en su resolución, etc. En definitiva, plantaste una semilla que dio sus frutos. Entre los asistentes nos encontramos algunas personas que un año más tarde tuvimos la responsabilidad de redactar el currículo de matemáticas en el Bachillerato LOGSE de la Comunidad Autónoma Vasca. Por la cabeza nos rondaba la idea de incluir un bloque de contenido específico denominado: Resolución de Problemas, sin embargo, teníamos muchas dudas, que tú disipaste de un plumazo a raíz de tu intervención.

Al año siguiente, 1990, te invitamos a trabajar con un grupo de 25 profesores en torno a un tema específico: La Resolución de Problemas. Queríamos reflexionar contigo, con tranquilidad, y cambiar impresiones en vivo y en directo respecto a un tema tan apasionante. Te convencimos para que vinieras toda una semana a Bilbao. El curso tuvo una duración de 15 horas. Recuerdo que venías muy puntual por la mañana, la mayoría de las veces con media hora de antelación, con ganas de comunicar lo que sabías; los descansos eran una continuación del curso, como si no quisieras desaprovechar ninguna ocasión. Creo que tú estuviste muy a gusto con nosotros. Eras como un joven que tenía que demostrar sus ganas de transmitir su sabiduría. Al igual que en Salamanca, los ojos te brillaron en muchas ocasiones. El recuerdo que yo tengo, y también la mayoría de los asistentes, es que el curso fue de los mejores a los que he asistido. Este encuentro nos sirvió para volver a ilusionarnos por las matemáticas y su enseñanza. Nos ofreciste un ramillete de problemas bellos, sugerentes, que en tus manos eran como piedras preciosas. Sin duda ese curso fue una verdadera formación del profesorado. Cuando finalizaba la sesión nos pedías un único favor, ir a comer a un restaurante en el centro de Bilbao que conocías desde tu paso como estudiante por Bilbao, allá por los años 50. La mayoría de las veces pedías de segundo plato jibiones en su tinta; quizá este plato te recordaba tu juventud. Yo cada vez que veo ese plato me acuerdo de ti y de un tiempo en el que tuviste la generosidad de compartir con nosotros tu humilde sabiduría.

Este curso tuvo una enorme importancia en mi devenir intelectual y en el de otros compañeros que aquí quiero recordar: Fernando Fouz, Felix Alayo, Amaia Basarrate, Monse Huguet... De hecho al año siguiente publicamos un monográfico sobre la Resolución de Problemas en nuestra querida revista *SIGMA* (Nº 10). Muchas de las ideas expuestas en ella, que tan buena acogida tuvo entre el profesorado, surgieron de aquel inolvidable curso que nos impartiste en Bilbao.

Ese encuentro no sólo supuso un acercamiento intelectual a tus planteamientos, sino sobre todo la posibilidad de saber que tú estabas cerca de nosotros. Para las dudas importantes allí estabas tú, a un golpe de teléfono, siempre atento, cercano y cariñoso.

Viniste a Bilbao al año siguiente, y al otro..., siempre con la misma ilusión, con ganas de contarnos cosas nuevas. Lo importante era escucharte a ti, nos conectabas con el mundo de la ilusión y de la magia matemática. Tenías la difícil habilidad de hacer entendible cualquier discurso. Tus pensamientos eran claros, tu voz tranquila, melodiosa y segura, empleabas las palabras precisas, mirando siempre de frente. No solías levantar mucho el tono de voz, pero no te hacía falta, pues la gente te escuchaba con un silencio cómplice. Planteabas tus intervenciones con sumo cuidado: el ritmo, la elección de los problemas, la calidad de las anécdotas... hacían que tus discursos rezumaran inteligencia.

Cada vez que venías a impartir un curso salíamos con ánimos renovados, era un verdadero placer escucharte. Para nosotros eras un verdadero Maestro. Tú nos conectabas con verdaderas ideas matemáticas, aquellas que nos hubiese gustado escuchar en la Universidad y que en la mayoría de los casos nos fueron hurtadas. Eras capaz de que en nuestros estómagos *revolotearan las mariposas*. Me consta que muchas de las personas que acudían a tus cursos piensan como yo. Pero, lo más importante es que tus ideas, en la mayoría de los casos, fueron proyectadas a muchos alumnos; bien a través de tus libros de Bachillerato o por la ilusión que tenían los docentes en transmitir tu manera de enfocar la enseñanza de las matemáticas. Estas son las verdaderas razones de llamarte una y otra vez.

La última vez que viniste a Bilbao, en el 2000, te pedimos que presidieras el *I Congreso sobre Matemáticas y Educación*; tu ayuda fue crucial, nos proporcionaste muchos contactos e ideas para organizar el Congreso. La mayoría de los ponentes aceptaron acudir con sólo saber de tu presencia. Fueron tres días mágicos que nunca olvidaremos.

La última vez que hablamos fue sólo una semana antes de morirte, me comentaste tus proyectos, en especial un tema que desde hace dos años te interesaba mucho: la tensegridad; al día siguiente de tu muerte un amigo común me llamó para comunicarme tan triste acontecimiento, no podía creerlo. Para mí eras, y sigues siendo, un personaje de leyenda.

Cuando pasen los años quiero que las personas que lean estas líneas sepan que existió una persona generosa y sabia, que se preocupó por extender su mensaje entre quienes le querían escuchar, y que hizo mucho por mejorar la enseñanza de las matemáticas.

Una persona generosa y sabia, que se preocupó por extender su mensaje entre quienes le querían escuchar, y que hizo mucho por mejorar la enseñanza de las matemáticas.

No soy yo el más indicado para realizar una valoración de su extensa y magnífica obra, únicamente daré algunos retazos en la vertiente de las matemáticas no universitarias. Espero que a las personas que aún no conozcan tus escritos, les sirvan las páginas siguientes para animarles: ¡lean ustedes a Miguel de Guzmán!

LOS PRIMEROS ESCRITOS DE CARÁCTER DIDÁCTICO

El año 1983 Miguel escribió por primera vez en la *Revista de Occidente* algunos de sus pensamientos respecto a la educación matemática. El artículo llevaba por título “Sobre la educación matemática”. Miguel reflexiona respecto a la enseñanza de las matemáticas, sus pensamientos eran claros, como lo han seguido siendo en posteriores escritos:

“En la enseñanza básica de nuestros alumnos se observa un aglomerado extraño; unos rudimentos de teoría de conjuntos, que vienen a constituir unos cuantos acertijos aislados (...).

En resumen, los defectos que, a mi parecer, aquejan más gravemente la enseñanza primaria podrían resumirse en cuanto a la forma en una notable desviación del objetivo principal de las matemáticas, que consiste en saber resolver problemas que puedan resultar adecuados e interesantes, en una ausencia de espíritu activo, de espíritu lúdico, de conexiones con el mundo real de los niños y sus intereses (...).

Por otra parte, se nota la ausencia de contenidos geométricos interesantes y de conexiones y aplicaciones a otras ciencias.

La enseñanza secundaria está afectada de un mal específico, además de adolecer de las mismas tendencias hacia el formalismo, abstracción y pasividad que enferman la primaria”.

Miguel aprovechaba el artículo para sugerir cambios sustanciales en los libros de texto. Se puede leer:

“Así, carentes nuestros enseñantes de textos que orienten su trabajo en la dirección adecuada, se ven empujados por las circunstancias en muchos casos a impartir la enseñanza adecuada para

contestar a un cuestionario con la máxima solvencia, con el consiguiente tedio y aburrimiento de sus alumnos y suyo propio”.

Al término del artículo, mostraba su gran preocupación y alerta sobre la situación de la educación matemática en nuestro país. Lo expresaba de la siguiente manera:

“Estamos muy lejos de donde deberíamos estar en lo que se refiere a nuestra educación matemática. Urge que la sociedad en general y especialmente quienes tienen a su cargo la orientación de la enseñanza se preocupen por resolver estos problemas cuanto antes con el fin de no perjudicar más a nuestros jóvenes, de no desaprovechar tanta energía y talento mal encauzado y de no quedándonos atrás en la formación matemática de nuestras jóvenes generaciones con respecto a las de otros muchos países en los que estos males, si los han sufrido, se han ido aminorando o corrigiendo plenamente”.

Al año siguiente, 1984, Miguel retomó y amplió el análisis expuesto en la *Revista de Occidente* en el artículo “El papel de la Matemática en el proceso educativo inicial”, publicado en *Enseñanza de las Ciencias* (1984), profundizando en su visión tan original de la matemática como arte, instrumento y ciencia. Miguel mostraba en él una especial preocupación por responder a una pregunta que a lo largo de los últimos años se planteaba frecuentemente: ¿cuáles son los contenidos adecuados en la educación matemática de hoy? Organizó su respuesta en cuatro apartados: bagaje necesario, matemática como ciencia, matemática como arte y juego y, por último, matemática como actividad humana. Su idea predominante era la de colocar a los alumnos en situación de dominar unos pocos conocimientos con los que verdaderamente pudiesen ejercitar su propia actividad intelectual creativa. Otro de sus consejos, que repetía hasta la saciedad, era la utilización de un método basado en la resolución de problemas, que expresaba de la siguiente manera:

“El método basado en problemas interesantes estimula fuertemente al individuo para hacerse capaz de crear combinaciones nuevas con las ideas e instrumentos que ya posee. Es la base del progreso”.

El artículo finaliza con una reflexión que puede resumir el quehacer matemático y la filosofía que Miguel propugnaba:

“La actividad matemática debe ir acompañada con cierto énfasis, por parte del educador, en el poder, la belleza, el sentido humano y profundo de las ideas que se manejan, aprovechando para ello todas las ocasiones que la materia proporciona”.

Belleza, sentido humano, profundidad..., lindas palabras que sin duda Miguel era capaz de transmitir.

LIBROS DE TEXTO PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Miguel tuvo ocasión de plasmar sus ideas, expresadas ya en diversos artículos, como los citados, cuando la editorial Anaya le invitó, conjuntamente con José Colera y Adela Salvador, a redactar una colección de libros de texto para BUP y COU. Estos libros fueron, sin duda, un modelo a seguir por parte de la mayoría de los docentes con inquietudes matemáticas; de hecho varias editoriales se acercaron posteriormente a los planteamientos expuestos tan magistralmente y que básicamente son los siguientes:

- Integración de la historia de las matemáticas en la enseñanza de esta disciplina. De hecho, todos los temas comienzan con un breve desarrollo histórico y del lugar que ocupa en las ciencias y en la cultura el contenido presentado.
- Preocupación por motivar al alumnado y favorecer el interés hacia las matemáticas, mediante biografías, anécdotas y problemas de entretenimiento.
- Elección adecuada de ejercicios y problemas, dedicando especial atención a la gradación de los mismos.
- Un especial interés por estudiar con mayor detenimiento campos de la matemática que apenas se presentaban en los libros de texto, como: estadística, probabilidad, aspectos geométricos y matemática discreta. Así como dedicar un estudio más somero a temas, que en opinión de los autores, deberían ceder paso en el futuro a otros temas más adecuados e importantes.
- Procurar fomentar la actividad de los alumnos, implicándoles a lo largo de todo el libro. La matemática es mucho más *saber hacer* que meramente saber.
- Un especial cuidado por conectar con los alumnos, presentándoles, ya desde el inicio, una serie de situaciones matemáticas, escogidas cuidadosamente, cuyo objetivo es servir de punto de partida al tema.
- Especial énfasis por usar un lenguaje directo y comunicativo, huyendo de tecnicismos innecesarios.
- Cada uno de los temas finaliza con una sección denominada *Revista*, con el objetivo de interesar y entretener, dando la oportunidad a los alumnos de conocer aspectos lúdicos y útiles en relación con el tema planteado.
- Todos los temas respetan dos principios didácticos claves: Ir de lo concreto a lo abstracto y partir de situaciones globales para finalizar en aspectos específicos.
- Por último, los libros están aderezados con problemas bien elegidos y sumamente interesantes.

Miguel siguió colaborando con la Editorial Anaya unos diez años más. El esquema de los libros apenas tuvo variaciones. Mención aparte merecen sus aportaciones en un campo tan novedoso como la resolución de problemas. Buena parte de dichas aportaciones que se fueron concretando en los libros de Bachillerato tienen su origen en uno de sus más conocidos libros: *Para pensar mejor* (1991).

También son muy destacables las referencias históricas con las que Miguel salpicaba sus textos. Situaciones y personajes bien escogidos, presentados de manera inteligente y capaces de enganchar a cualquiera, eran como pequeñas ventanas abiertas a un mundo mágico.

Yo mismo empleé en incontables ocasiones sus libros, tanto en mis clases, como en los diversos momentos a los que acudía para saber cómo presentar tal o cual tema. Hacia finales de los años 90, José Colera me invitó a formar parte del equipo redactor de los libros de bachillerato de Anaya. Tuve la enorme responsabilidad de coger el testigo que Miguel había dejado.

LIBROS DE CARÁCTER DIDÁCTICO Y ENSEÑANZAS DE LAS MATEMÁTICAS

Los primeras obras de Miguel se centraron en temas de alcance universitario: ecuaciones diferenciales, teoría de la estabilidad y control, análisis de Fourier, diferenciación, análisis armónico, etc.

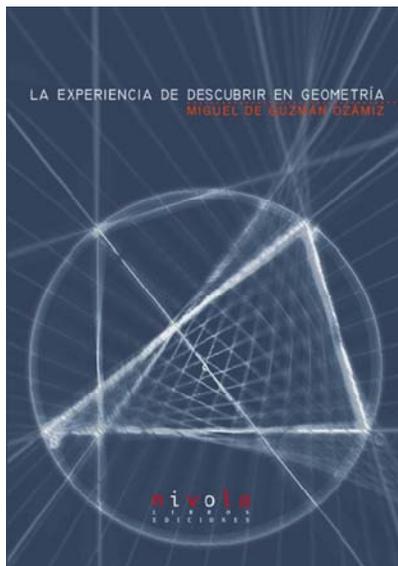
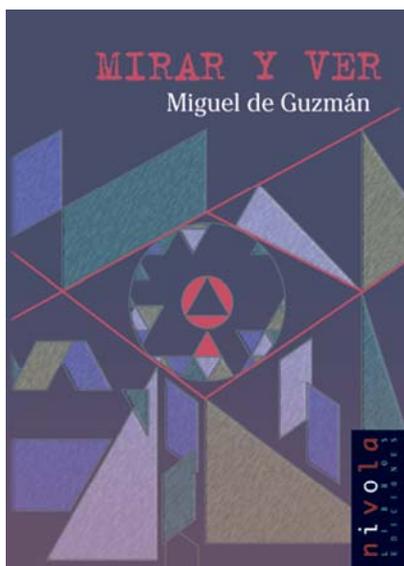
El año 1976 publicó un precioso libro, *Mirar y ver*, que, según Miguel, intentaba contribuir a la búsqueda de equilibrio, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, entre la intuición espacial y el rigor formal. Los nueve ensayos que componen la obra los eligió con sumo cuidado, son temas profundos y bellos, tratados con cariño. Por el libro desfilan una constelación de grandes matemáticos: Euler, Gauss, Pascal, Hilbert, Minkowski..., acompañados de algunos de sus logros: los siete puentes de Königsberg, aproximación del número pi, desigualdades de Young, Hölder, Jensen, Minkowski..., el lema de Sperner, teorema del punto fijo, etc.

Este libro fue una de sus primeras reivindicaciones de la denominada “geometría intuitiva”. Con herramientas nuevas, como el ordenador y un buen asistente matemático, Miguel continuó la búsqueda de la belleza geométrica adentrándose en *La Experiencia de descubrir en Geometría* (2002) en viejos y nuevos problemas, pero tratados de manera novedosa en la mayoría de los casos. Ya en el prólogo del libro expresa la manera de afrontar los problemas geométricos mediante herramientas informáticas. Decía Miguel:

“Con esto nuestro trabajo en matemáticas, ayudados en todas sus fases por el ordenador, consistirá, cada vez en más campos, en lo siguiente: Diseñar con imaginación y guiados por la experiencia acumulada, propia y ajena, experimentos bien contruidos... Conjeturar las razones profundas que yacen bajo los experimentos y los resultados... Reforzar o refutar nuestras conjeturas con expe-

rimientos más refinados... Demostrar o refutar nuestras conjeturas automáticamente con el ordenador”.

Es de resaltar que Miguel ha sido pionero en la integración de la informática y los asistentes matemáticos, como se puede ver en su escrito “El ordenador en la Educación Matemática” (1994; 33–40), en el que explora los posibles modos de utilización de los programas de cálculo simbólico y sus efectos en el aprendizaje matemático; pero también pone el acento en los peligros que pueden darse ante una inadecuada utilización, aspecto que fue desarrollado en su artículo “Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática” (1991).



Algunos años antes, en 1984, con su libro *Cuentas con cuentos*, Miguel invitaba a los más jóvenes a sumergirse en el mundo de la matemática, siguiendo el hilo conductor del juego y la belleza matemática. Dos años más tarde publicaba uno de sus libros más reconocidos (de hecho se ha traducido a cinco idiomas, entre ellos el chino): *Aventuras matemáticas* (1986). El libro se componía inicialmente de 13 ensayos que posteriormente (1995) amplió hasta 18. Es un texto muy sugerente y lleno de ideas que cualquier persona interesada por las matemáticas debería leer. Por el libro desfilan desde el Teorema de Fermat, hasta el de Gödel, pasando por la cicloide, problemas resueltos con regla y compás, el principio del palomar, etc. El libro apunta aspectos relativos a la resolución de problemas que fueron abordados nuevamente y, con mayor profundidad, en *Para pensar mejor* (1991). El objetivo del libro es claro. Decía Miguel:

“Pensar mejor es un objetivo deseable y realizable. La intención de este libro es proporcionarte una guía práctica para saber dónde aplicar tu esfuerzo para conseguirlo más eficazmente”.

La importancia del libro radica en el estudio que realiza de la actitud inicial sana para resolver problemas, así como de la actividad subconsciente en la resolución de los mismos.

Durante los años 90 Miguel fue muy activo. Además de publicar libros con Baldomero Rubio sobre Análisis matemático para los primeros años de Universidad, en *El rincón de la pizarra* (1996) se preocupó por plasmar algunas ideas profundas de análisis desde una óptica asequible. Es muy destacable el capítulo cero, titulado “El papel de la visualización”. El esfuerzo por mostrar elementos matemáticos desde un punto de vista intuitivo y visual es encomiable. Miguel proponía:

“Tener en gran aprecio el poder de la visualización y enseñar a nuestros estudiantes a estimarla. Insistir constantemente en visualizar y en transcribir de vez en cuando las visualizaciones en expresiones formales de la forma actualmente admitida de los hechos que se visualizan, a fin de hacer patente la posibilidad de pasar de un tipo de lenguaje a otro”.

Miguel era una persona con una gran inquietud en todo lo referente al llamado Universo Matemático. Le interesaba desde las últimas investigaciones matemáticas hasta los artículos referidos a la enseñanza de esta ciencia; justamente este último apartado fue objeto de muchas de sus reflexiones. En el libro *Enseñanza de las ciencias y la matemática* (1993) nos trasladaba algunos de sus pensamientos respecto a preguntas capitales: ¿por qué la enseñanza de la matemática es difícil?, ¿qué es la actividad matemática?, ¿cuáles son los contenidos predominantes?, ¿qué tipo de propuestas se pueden hacer para mejorar la enseñanza de las matemáticas?, etc. Cada una de sus preguntas tiene cumplida respuesta. También quedaba patente su preocupación por la formación inicial de los profesores de matemáticas, aspecto sobre el que reflexionó en varias ocasiones:

“A mi parecer, es muy necesario, por lo que a la sociedad le va en ello, que se formen en nuestras universidades buenos equipos de investigación en educación matemática que ayuden a resolver los muchos problemas que se presentan en el camino para una enseñanza más eficaz”.

Uno de los grandes objetivos de Miguel era popularizar la matemática, en definitiva que esta disciplina traspasara la barrera académica y fuera capaz de presentarse en sociedad, a través de los distintos medios de comunicación.

EL TALENTO MATEMÁTICO

A Miguel le preocupaba enormemente el acercar las matemáticas a los más jóvenes y, especialmente, a aquellos que tenían una especial facilidad para comprenderlas. Solía decir:

“Es seguro que en nuestras comunidades escolares existe un cierto número de estudiantes con una dotación intelectual para las matemáticas verdaderamente excepcional. Son talentos que pasarán a veces más o menos inadvertidos y más bien desatendidos por la imposibilidad de que los profesores dediquen la atención personal que se necesitaría. Por otra parte, son talentos que podrían rendir frutos excepcionales para el bien común de nuestra sociedad, si no se malograrán, mediante su aporte extraordinario al desarrollo cultural, científico y tecnológico del país. Constituye una gran responsabilidad social la indudable pérdida de talento que causa su desatención”.

Miguel era un hombre de acción y desde muy pronto intentó paliar ese problema. El año 1998, apoyado por la Real Academia de las Ciencias (institución a la que pertenecía) puso en marcha un proyecto piloto “Para la detección y estímulo del talento precoz en matemáticas en la Comunidad de Madrid”. Es de resaltar que más de una docena de distinguidos profesores arrimaron el hombro a tan atrayente proyecto. En el ICME 10, que se celebró este año en Copenhague, Miguel tenía previsto intervenir con una ponencia dedicada a este tema.

LAS MATEMÁTICAS, LA SOLIDARIDAD Y EL COMPROMISO CON LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En 1990, en Kyoto (Japón), Miguel fue elegido Presidente de la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI) para el período 1991-1994 y reelegido para el mismo cargo en la Asamblea de la IMU en Zurich para el período 1995-1998. Como presidente tuvo un papel destacadísimo y decisivo para que se celebrase en Sevilla (1996) el ICME 8.

Desde su cargo de presidente del ICMI se comprometió activamente con la mejora de la educación matemática en varios frentes.

En su discurso presidencial en la ceremonia de inauguración del ICME 7 en Québec (1992), Miguel pidió a la comunidad matemática que se comprometiera más y que los países más ricos fuesen más solidarios con los países más desfavorecidos. Como consecuencia, se decidió proponer la realización de un Proyecto de Solidaridad del que se fueron derivando unas cuantas acciones. Miguel por su parte apoyó la creación en España de Cooperación Universitaria Española (CUES), ONG que ha promovido y realizado varias maestrías

relacionadas con la Matemática y la educación matemática en países de Latinoamérica como El Salvador y Perú.

Las relaciones poco permeables, y en ocasiones tirantes, entre las distintas comunidades de matemáticos fue un tema que también preocupó a Miguel. Con motivo del ICME 8 en Sevilla (1996), presentó sus ideas sobre un tema tan espinoso. Miguel tendió puentes entre la comunidad matemática universitaria a la que pertenecía y la de didactas y profesores de Matemáticas. Además, apoyó decididamente la investigación en Didáctica de las matemáticas dirigiendo trabajos y formando parte de los tribunales, participando activamente en la defensa de Tesis doctorales en esta área de conocimiento. En la Universidad Complutense promovió la creación de un título de Experto en Educación matemática.

Los últimos años, en su ánimo de ayudar a los nuevos alumnos, diseñó un curso, eminentemente práctico, cuyo objetivo era ayudar a los estudiantes que entran en la Facultad para introducirse más eficazmente en el trabajo matemático. Además de contenidos matemáticos muy adecuados para esas edades, Miguel escribió unos consejos para trabajar mejor en matemáticas:

Cómo trabajar en matemáticas	Cómo usar el libro de texto
Sobre todo trata de entender	En espiral
Saber matemáticas es saber hacer cosas con lo que aprendes	Activa lo que ya sabes relacionado con el tema
Dibuja a tu modo	Haz tú mismo los ejemplos y ejercicios aclaratorios
Los diferentes objetos matemáticos son herramientas para hacer algo con ellos	Si no consigues enfocar y resolver bien los ejercicios, vuelve a leer pausadamente lo que precede del tema
La pregunta es el anzuelo para pescar en el mar de las ideas	Evalúa tu trabajo
No trates de memorizar nada antes de haber entendido bien a fondo	Identifica lo que has de tratar de retener del capítulo
Activa frecuentemente lo que has aprendido	Hacer muchos problemas es muy bueno
Memoriza lo que es de uso constante	

En definitiva, allí donde había un problema, Miguel proponía una solución.

PARA FINALIZAR

A Miguel le preocupan las matemáticas en sí, pero sobre todo el papel de las mismas en una sociedad tan cambiante. Buena muestra de ello son sus conferencias y escritos para la Real Academia (1994) que, bajo el título *El Impacto de la matemática sobre la cultura*, reflexionan respecto a la naturaleza del quehacer matemático, su relación con el pensamiento filosófico y su conexión con la técnica, el arte y la cultura.

La divulgación de las matemáticas por parte de Miguel no se redujo a sus libros, participación de Jornadas, etc. Donde manifestó su carácter polifacético y generoso es en sus publicaciones a través de Internet. Como en otras tantas cosas Miguel fue un pionero de la utilización de Internet para extender el saber matemático.

Miguel, era una persona generosa con la que siempre se podía contar, dispuesto a cooperar y aportar ideas. Era asequible, es de reseñar su espíritu de servicio por y para las matemáticas. Respetuoso y educado en el trato siempre cálido y afable, su amplia sonrisa le delataba. Quienes hemos tenido la suerte de conocerle lamentamos su pérdida.

Sin duda, la comunidad matemática ha perdido a una gran persona, una referencia clara y un excelente profesional. Hasta siempre, querido amigo.

REFERENCIAS

- [1] M. DE GUZMÁN, *Mirar y ver*. Alhambra, Madrid, 1976 (edición revisada: Nivola, Madrid, 2004).
- [2] M. DE GUZMÁN, "Sobre la educación matemática". *Revista de Occidente*. **26** (1983), 37–48
- [3] M. DE GUZMÁN, "El papel de la Matemática en el proceso educativo inicial". *Enseñanza de las Ciencias*. **1** (1984), 91–95
- [4] M. DE GUZMÁN, *Cuentos con cuentas*. Labor, Barcelona, 1985 (edición revisada: 2004, Nivola, Madrid)
- [5] M. DE GUZMÁN, *Aventuras matemáticas*. Labor, Barcelona, 1986 (edición revisada: Pirámide, Madrid, 1995).
- [6] M. DE GUZMÁN, *Para pensar mejor*. Labor. Barcelona, 1991 (edición revisada: Pirámide, Madrid, 1991).
- [7] M. DE GUZMÁN Y D. GIL, *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e Innovaciones*. Popular, Madrid, 1993.
- [8] M. DE GUZMÁN, "El ordenador en la Educación Matemática". *Vela Mayor, Revista de Anaya Educación*, **3** (1994).
- [9] M. DE GUZMÁN Y C. ALSINA, *Los matemáticos no son gente seria*. Rubes, Barcelona, 1996.

- [10] M. DE GUZMÁN, *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis*. Pirámide, Madrid, 1997.
- [11] M. DE GUZMÁN, *La experiencia de descubrir en geometría*. Nivola. Madrid, 2002.

Santiago Fernández Fernández
Asesor de matemáticas del Berritzegune de Bilbao
Correo electrónico: santiagoofer@berrikuntza.net



Miguel de Guzmán y Santiago Fernández en Bilbao en el año 2000

SIGMA

REVISTA DE MATEMÁTICAS
MATEMATIKA ALDIZKARIA

Nº 25 Zka.



Noviembre · Azaroa

Herederos de Miguel de Guzmán: ¿Qué aprenden nuestros alumnos de resolución de problemas?

por

Jorge Cruz y José Carrillo

*Ninguno de los colegas se apercibió de quién había venido,
respondieron como de costumbre al saludo, dijeron,
Buenos días, don José,
y no sabían con quién estaban hablando.
(De Todos los nombres, José Saramago)*

INTRODUCCIÓN

Aventuras matemáticas, Para pensar mejor, dos libros, dos ideas claves en el pensamiento y en la actitud de Miguel de Guzmán hacia el conocimiento matemático. Mas no tendré el atrevimiento, como los colegas del protagonista de *Todos los nombres*, de pensar que sé quién era Miguel en realidad; no, sería desconsiderado, además de atrevido. Hay tantas ideas, tantos pensamientos, tantos comportamientos, tantos sentimientos, tantos explícitos e implícitos... tantas personas en una persona y tantas posibles interpretaciones, que arrogarse una de éstas como adalid de la esencia de una persona sería un acto de irreverencia e ingenuidad, y, en su caso, probablemente cometería la injusticia de no hacer honor a toda su humanidad.

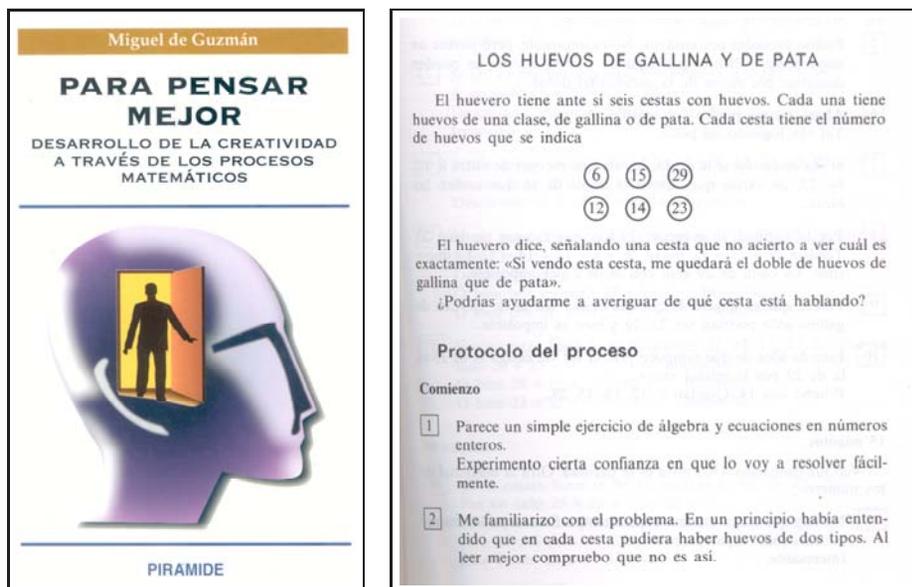
Nos bastaron sus obras, sus reflexiones, su persona, su impulso. Gran parte de todo ello permanece entre nosotros, es su herencia, repartida entre una inmensidad de herederos.

La primera vez que hablé con Miguel fue por teléfono, quería que me orientara en mis deseos de investigar sobre algo relacionado con la Historia o con la Didáctica de las Matemáticas. Aceptó mi propuesta, fui a Madrid, me recibió amablemente en su despacho y me inició en el gusto por investigar sobre resolución de problemas. En esta y otras visitas, en sus reflexiones, me fue desvelando parte de su visión sobre el conocimiento matemático: el dinamismo de la matemática, la profesión de explorador del matemático, la capacidad y dis-

*Nos bastaron sus obras,
sus reflexiones, su per-
sona, su impulso. Gran
parte de todo ello per-
manece entre nosotros,
es su herencia, repartida
entre una inmensidad de
herederos.*

ciplina a la hora de reflexionar y enfrentarse a retos matemáticos, la humildad al compartir las propias estrategias de resolución.

En *Para pensar mejor* (Guzmán, 1991, 1993), podemos ver varios protocolos suyos en los que detalla su proceso de resolución, con errores o caminos demasiado largos incluidos, como en el ejemplo de “Huevos de gallina y de pata”. No quiere mostrar una matemática exacta y fría, sino el dinamismo de nuestro pensamiento cuando nos acercamos a ella.



En *Aventuras matemáticas* (Guzmán, 1986, 1995), vemos al matemático explorador, asistimos a una matemática divertida, interesante, al tiempo que profunda. Nos sitúa ante la importancia de las conjeturas para progresar en matemáticas, y, al mismo tiempo, nos previene del exceso de confianza en ellas.

La exploración y el empleo de estrategias para pensar mejor son, desde mi lectura de sus libros y desde las reflexiones que he compartido con él, dos ideas emblemáticas de su pensamiento y su actitud hacia las matemáticas. Ideas que pueden interpretarse como una concepción dinámica de la matemática (Ernest, 1989) y como una apuesta por una enseñanza heurística (Pólya, 1986; Schoenfeld, 1985).

Quise que estas ideas impregnaran mi tesis doctoral (Carrillo, 1998), bajo su dirección, y así dediqué el trabajo a indagar en las concepciones de profesores sobre la matemática y la enseñanza de las matemáticas, y en cómo esos profesores se enfrentaban a la resolución de problemas, actuando ellos como resolutores, no como profesores. En este trabajo desarrollé un listado comentado de heurísticos, así como un instrumento de evaluación de resolución de problemas.

Ha llegado ahora el momento de transmitir esa herencia heurística de Miguel a otros. Bebiendo de las fuentes de Miguel, entre otras, Jorge Cruz (Cruz, 2003) ha desarrollado una investigación con alumnos en la que analiza qué han aprendido dichos alumnos tras dos años de escolaridad en cuanto a las estrategias que emplean al resolver problemas. Sobre los resultados de este trabajo volveremos más adelante.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y ESTILO HEURÍSTICO

En Portugal, el Programa de Enseñanza Secundaria en vigor¹ (Ministério da Educação, 1997) menciona la importancia de la Lógica y el Razonamiento Matemático como tema general y, dentro del mismo, particulariza la importancia de la Heurística. Como orientación para los profesores indica dos autores: Pólya y Guzmán. Al mismo tiempo presenta las fases de los dos modelos acompañadas de las respectivas heurísticas; y al final indica como referencia ocho obras de Guzmán, incluyendo libros de texto en cuya elaboración participó, lo que muestra la influencia de Miguel de Guzmán en las orientaciones curriculares en Portugal, en cuyo país se ha desarrollado el mencionado trabajo.

El Currículo Nacional de Enseñanza Básica (Ministério da Educação, 2001), al definir las competencias a desarrollar por los alumnos, también destaca la resolución de problemas:

“La predisposición para razonar matemáticamente, es decir, para explorar situaciones problemáticas, procurar regularidades, elaborar y comprobar conjeturas, formular generalizaciones, pensar de manera lógica” (p. 57)

Desarrollar la capacidad para resolver problemas es, además, el primer objetivo general dentro del área de capacidades del Programa de Matemáticas, Plano de Organización de la Enseñanza-Aprendizaje para el 3º Ciclo de Enseñanza Básica (Ministério da Educação, 1991), ciclo en el que se contextualiza el trabajo que presentamos. Este objetivo llega a subdividirse en otros más específicos que se corresponden con fases del proceso de resolución de problemas (p. 10).

La gran popularidad de las heurísticas en la enseñanza de la resolución de problemas tiene, como señala Hanna (2000), muchos adeptos, quienes le atribuyen más utilidad en detrimento de las demostraciones matemáticas, pues consideran que éstas, cuando se enseñan rutinariamente, carecen de valor educativo. Paralelamente atribuyen un significativo papel educativo a la investigación, la exploración y la justificación informal. Estas actividades potencian la intuición, la cual genera insights matemáticos. Hanna afirma que las orientaciones del NCTM (1989) y del Currículo Nacional Británico (Noss, 1994) reflejan esta corriente.

¹Se refiere a los años 10, 11 y 12 de enseñanza. Ha sufrido reajustes desde su publicación.

Guzmán no pone en enemistad a heurísticas y demostraciones, sino que se fija en el poder exploratorio de las primeras, en su potencial educativo, en el modo cómo pueden ser la antesala de las segundas. No reniega de éstas, sino de su uso como frontispicio del edificio matemático, caracterizándolo, o de su defensa como pilar del mismo. Las demostraciones, mucho más en las etapas no universitarias, no son para él el comienzo del proceso de acercamiento al conocimiento matemático, sino, si acaso, uno de sus fines. El conocimiento matemático se halla básicamente en el camino, no sólo en el final. Para él

“el saber matemático es mucho más un saber de método que de contenido...La matemática como conocimiento a encontrar, no como enseñanza a impartir...La matemática es una verdadera ciencia experimental” (Guzmán, 1985, p. 32, 34, 35)

En Guzmán (1984, p. 11-12) describe las fases del modelo de resolución de problemas como sigue:

1. Antes de hacer trataré de entender.
2. Tramaré una estrategia.
3. Miraré si mi estrategia me lleva al final.
4. Sacaré jugo al juego.

Además de enunciar las fases en modo directo, pensado para los alumnos, en la última fase encierra su apuesta por la matemática lúdica (importancia de los problemas, planteados como desafíos o juegos) y por el aprendizaje reflexivo (sacar jugo al juego es ser consciente de lo conseguido y de lo que no ha sido útil en el proceso, significa aumentar el bagaje de experiencias que son aprovechables en desafíos futuros).

EL CASO AVE

La investigación desarrollada por Cruz (2003) estudia el comportamiento de 12 alumnos de 7º y 9º (12 y 14 años) a través de una batería de 10 problemas de Números y Geometría. Sus objetivos son: a) Obtener datos relativos a recursos, heurísticos y control puestos en juego por alumnos de nivel 7 y 9 durante la resolución de problemas; b) Esbozar perfiles de actuación de alumnos de nivel 7 y 9; y c) Obtener similitudes y diferencias entre los modos de actuación (perfiles) de los alumnos de 7º y 9º. Se seleccionaron 6 alumnos de cada nivel, de los cuales 2 habían tenido anteriormente buenas calificaciones en Matemáticas, 2 solían estar en el término medio, y 2 solían sacar calificaciones bajas².

²Las calificaciones posibles van de 1 a 5, siendo el 3 el mínimo para aprobar.

No hemos pretendido constatar o refutar ninguna teoría, sino acercarnos a comprender mejor cómo resuelven los alumnos y qué evolución muestran al cabo de dos años. Dicha evolución ha de entenderse de modo aproximado, ya que no son los mismos los alumnos de 7º y 9º, sino aquellos que presentan un perfil similar en cuanto al logro académico. Entendemos que esto supone limitaciones, pero nuestro ánimo es huir de generalizaciones. El enfoque es, pues, interpretativo y el método usado es cualitativo.

Los datos se han recogido en tres sesiones, cada una de 90 minutos de duración, en las que los alumnos se enfrentaron a 4, 3 y 3 problemas, respectivamente. Dichos datos son sus protocolos de resolución. Los alumnos recibieron los enunciados por escrito, cada uno en una hoja, donde aparecía una línea al margen derecho y se les indicaba que en ese hueco debían explicar las razones de las decisiones que tomaran durante el proceso de resolución del problema. Dispusieron también de materiales (manipulables, instrumentos de medida, calculadoras, instrumentos de dibujo), invitándoseles a explorarlos por si deseaban usarlos en la resolución. A partir del criterio de expertos y de un estudio piloto se seleccionaron 5 problemas de Números y otros 5 de Geometría. Además de la claridad y la precisión (que no formalismo) del lenguaje empleado en el enunciado, se utilizó como criterio el que fueran asequibles en los dos niveles y no supusieran una gran ventaja, desde el punto de vista conceptual, para los alumnos de 9º.

De entre los alumnos, emerge el caso AVE. Se trata de un alumno de 7º, con calificación mínima (3) para aprobar matemáticas.

Frente a la ausencia generalizada por parte del alumnado del uso de materiales para representar situaciones y de este modo obtener evidencia relevante para encontrar una solución del problema, AVE fue la única excepción, si bien sólo utilizó materiales en un problema. Del perfil de este resolutor, puede destacarse lo siguiente:

1. Revela pocos conocimientos de matemática escolar.
2. A veces sustituye la falta de conocimiento con creatividad y capacidad de hacer inferencias a partir de las figuras.
3. Revela buen control del proceso de resolución, siguiendo coherentemente los razonamientos.
4. Cuando comete errores de interpretación, por lo general no los detecta, pues sólo revisa las fases de Planificación / Exploración y de Ejecución³.
5. Revela más facilidad en la resolución de problemas geométricos que en la de numéricos.

³En la investigación citada se sigue el modelo de Carrillo (1998), con las fases: 1. Comprensión; 2. Planificación / Exploración; 3. Ejecución; 4. Verificación.

A continuación presentamos algunos problemas, con sus correspondientes protocolos (en portugués), con los que pretendemos respaldar el perfil anterior. El primero de ellos es el tercer problema de Números, N3, en el que se puede apreciar su poco conocimiento de la matemática escolar, pues ni proporciones, ni porcentajes, ni reglas de tres simples se movilizan en el protocolo. Asimismo, parece no comprender muy bien el problema, sospecha que apoya la característica 4, pues no hay indicios de revisar su interpretación inicial.

N3: Mariana fue a comprar a una tienda donde hacían un descuento de 20% en todos los productos. Se compró una mochilla. El empleado, después de calcular el descuento, le dijo que tenía que pagar un impuesto de 15% por encima del precio calculado. Hechos los cálculos, Mariana se fue satisfecha con su nueva mochilla. ¿Si fueras tú a comprar a esa tienda, que querrías que te calcularan en primer lugar, el descuento o el impuesto?

<p>Eu queria que fosse calculado o desconto porque se o desconto me valor da compra e depois pagar o imposto, que neste caso é 20%+15%, fico com 5% de desconto e com o imposto em primeiro pagaria 5% de imposto e o preço da compra seria igual.</p> <p>R: Eu queria que o desconto fosse calculado primeiro.</p>	<p>Também fico com 5% de desconto. Se eu fosse pelo outro lado o preço da compra seria maior se tivesse o mesmo que com o desconto o preço o preço seria maior.</p>
---	--

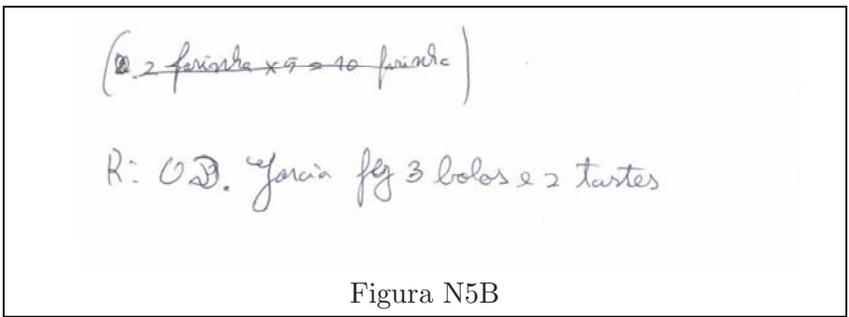
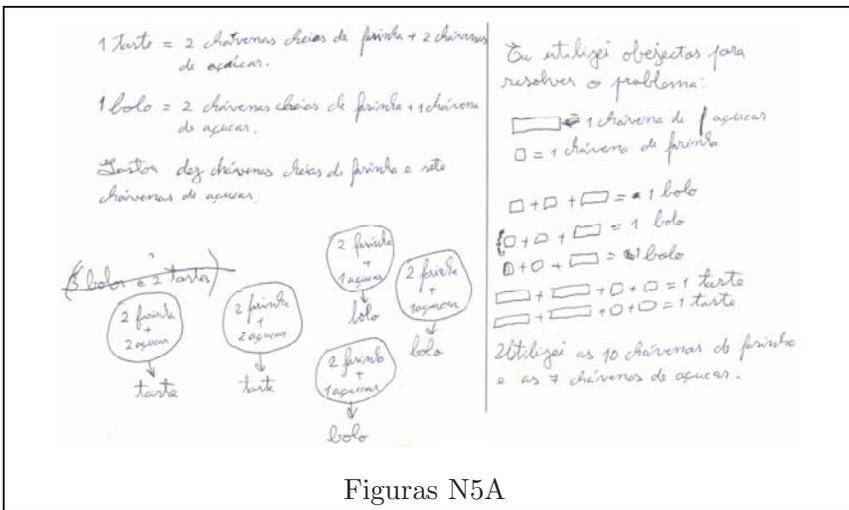
Figura N3

En N5 observamos el uso de materiales para representar una situación y obtener, además de información relevante, una reformulación del problema en otro equivalente a través de un cambio de perspectivas. También ejemplifica 2 y 3, pues es creativo y revela buen control (no comete errores y revela detalle en la explicación del razonamiento).

N5: La señora García hizo dos tipos de tartas. Las tartas de fresas^a necesitan dos tazas de azúcar y dos tazas de harina. Las tartas de nata^b necesitan dos tazas de harina pero una de azúcar. Al final se han gastado diez tazas de harina y siete de azúcar. ¿Cuántas tartas de fresas y cuántas tartas de natas hizo?

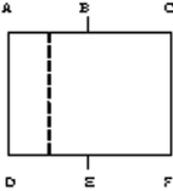
^aEn portugués se utilizó la expresión “tarte”.

^bEn portugués se utilizó la expresión “bolo”.

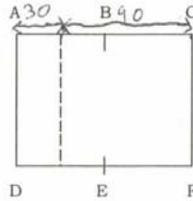


El problema G4 ejemplifica 3 pues el resolutor sigue coherentemente los razonamientos. También ejemplifica 2 en la medida en que muestra buena capacidad de inferir a partir de las figuras.

G4: D^a Matilde, mientras guardaba el mantel, se fijó que si lo doblaba de manera que A coincidiese con B y D coincidiese con E, el mantel tenía la forma de un cuadrado de 90 cm de lado. ¿Cuál es el área del mantel?



(B es el punto medio de [AC] y E es el punto medio de [DF])



$$90 \times 90 = 8100 \text{ cm}^2$$

8100 cm² é a área do quadrado

~~é o comprimento~~

Se dividirmos 90 por 3 vai dar 30

30 é a ~~medida~~ medida da largura do retângulo.

$$30 + 90 = 120 \text{ cm}$$

120 cm é a ~~medida~~ medida do comprimento da toalha

$$120 \times 90 = 10800 \text{ cm}^2$$

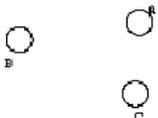
Figura G4A

R: A área da triângulo é de 10800 cm²

Figura G4B

Finalmente, G5 ejemplifica 1 (pocos conocimientos de la matemática escolar) pues el alumno no consigue obtener una construcción de las mediatrices de los lados del triángulo con vértices en las tres tiendas. También ejemplifica 2 pues el resolutor tiene buena capacidad de inferencia, al conseguir descubrir y explicar las condiciones que una circunferencia debe cumplir para que su centro sea el punto pretendido.

G5: La figura muestra un campamento de exploradores donde hay 3 tiendas de campaña: A, B y C. Los exploradores quieren poner un puesto de vigilancia situado a igual distancia de las tres tiendas de campaña. Indica en la figura dónde pondrías el puesto de vigilancia.



(No olvides indicar algo que ayude a comprender cómo pensaste)

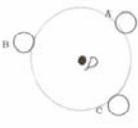
<p>A figura mostra um acampamento de escuteiros onde estão instaladas 3 tendas A, B e C. Os escuteiros querem montar um posto de vigia que se situe a igual distância das três tendas. Indica na figura onde colocarias o posto de observação. (Não esqueças de indicar algo que ajude a compreender a maneira como pensaste)</p> <p style="text-align: right;">7/5=</p>		<p>Neste espaço deves fazer comentários sobre o modo como tentaste resolver o problema. Se fizeres alguma tentativa que te pareça falhada, podes comentá-la também.</p>
<p><i>Eu realizei o problema com o compasso fazendo uma circunferência que toca-se no mesmo ponto em todas as tendas</i></p> <p><i>R: O ponto D é onde fica o posto.</i></p>		

Figura G5

Debido a la capacidad de inferir, o intuir, a partir de figuras, consigue mejor rendimiento en problemas con figuras geométricas. Cuando se trata tan sólo de operar con números, su conocimiento algorítmico puede ser insuficiente (como sucede en el problema N3).

El número de problemas correctamente resueltos (6 de 10) muestra que AVE tiene un rendimiento razonable, intermedio, coherente con la clasificación obtenida en la disciplina hasta entonces. Un análisis más detallado de sus resoluciones evidencia sin embargo potencialidades importantes (como puede extraerse de las conclusiones 2 y 3, e incluso de la 4).

Este alumno no había hecho antes resolución de problemas en las clases de matemáticas. Tan sólo había visto cómo, si acaso, los problemas se colocaban al final del contenido para mostrar su utilidad. Su participación en esta investigación, así como los tres años de enseñanza que entretanto acaba de completar, le mostraron otro tipo de problemas. Aumentó su motivación por la disciplina, los problemas adquirieron otra dimensión y su creatividad natural se vio potenciada por la diversidad de caminos no formales que estos nuevos problemas le posibilitaron. Recordando la expresión de Guzmán, AVE “sacó jugo al juego”, de tal forma que su rendimiento en matemáticas, incluso cuando sólo se trataba de aprender nuevos contenidos, mejoró, obteniendo las calificaciones 3, 4 y 4 en los años 7, 8 y 9, respectivamente. Esta es evidentemente una forma simplista de hablar del progreso en su rendimiento. Consultado al respecto, el profesor de AVE a lo largo de estos tres años afirma, sin lugar a dudas (según sus propias palabras), que:

- A. AVE mejoró su rendimiento como resolutor de problemas a lo largo de estos tres años, estando entre los tres mejores resolutores de su clase, pues se dedicaron varios momentos a la resolución de problemas y los resultados de la evaluación lo mostraron de forma evidente.
- B. AVE mejoró su rendimiento a nivel de los conocimientos típicos de la matemática escolar, pues los resultados de la evaluación realizada con cuestiones de tipo tradicional también lo mostraron de forma evidente. Podemos concluir que la resolución de problemas mostró a este alumno caminos no formales de resolver problemas, experimentó el estilo heurístico como matemáticamente válido. Al ganar confianza en la utilización de estos procesos ganó también confianza para superar las dificultades que poseía respecto a los conocimientos matemáticos. Estos dos componentes hacen de él un alumno mejor preparado, tanto para la matemática escolar, como para la resolución de problemas, como para afrontar los retos que se encontrará en su vida.

Sin temor a exagerar, podemos decir que AVE vio crecer sus alas. Gracias, Miguel, por tu valiosa herencia.

REFERENCIAS

- [1] J. CARRILLO, *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza*. Huelva, Universidad de Huelva Publicaciones, 1998.
- [2] J. CRUZ, *Alguns dados sobre recursos e heurísticas, postos em prática por alunos do ensino básico durante a resolução de problemas. (Estudo comparativo entre alunos de 7º e de 9º ano)*. Huelva, Inédito, 2003.
- [3] P. ERNEST, *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. En C. KEITEL ET AL. (EDS) *Mathematics, Education and Society. Science and Technology Education*. Document Series 35. Paris: UNESCO, 99-101, 1989.
- [4] M. DE GUZMÁN, *Juegos Matemáticos en la Enseñanza*. En Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Santa Cruz de Tenerife, 10-14 Septiembre, 1984. También disponible en: <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm>
- [5] M. DE GUZMÁN, (1985). Enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática. Aspectos didácticos-1, Bachillerato. *Aula Abierta* **57** (1985) 31-46.
- [6] M. DE GUZMÁN, *Aventuras matemáticas*. Labor, Barcelona, 1986.
- [7] M. DE GUZMÁN, *Para pensar mejor*. Labor, Barcelona, 1991.
- [8] M. DE GUZMÁN, *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad*. Pirámide, Madrid, 1993.
- [9] M. DE GUZMÁN, *Aventuras matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios*. Pirámide, Madrid, 1995.
- [10] G. HANNA, Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics* **44** (2000) 5-23
- [11] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO *Programa do Ensino Básico. Plano de organização do ensino-aprendizagem. vol II*. Imprensa Nacional Casa da Moeda, Lisboa, 1991.
- [12] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO *Programa de Matemática, 10º, 11º e 12º anos*. Editorial do Ministério da Educação, Lisboa, 1997.
- [13] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO *Currículo Nacional do Ensino Básico*. Departamento do Ensino Básico, Lisboa, 2000. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.
- [14] R. NOSS, Structure and ideology in the mathematics curriculum. *For the learning of mathematics* **14** (1994) 1, 2-10.
- [15] G. PÓLYA, *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México, 1986.
- [16] A.H. SCHOENFELD, *Mathematical problem solving*. Academic Press, New York, 1985.
- [17] M. DE GUZMÁN, *Para pensar mejor*. Pirámide, Madrid, 1995.

- [18] A.D. SCHOENFELD, “What’s all the fuss about Problem Solving?”. *ZDM*, **91** (9) (1991) 4–8.
- [19] A.H. SCHOENFELD, “*Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics*”, D.A. GROUWS (EDS), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. MacMillan, New York, 1992. 334–389.

Jorge Cruz
Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos Santiago Maior de Beja (Portugal)

José Carrillo
Universidad de Huelva