Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

Publicamos aquí el texto de una conferencia impartida por Javier de Lorenzo en la Universidad de Sevilla el 21 de noviembre de 2001, dentro del Seminario de Historia de las Matemáticas.

De la extensa obra de Javier de Lorenzo, conviene resaltar los siguientes títulos. En su primer libro, *Introducción al estilo matemático* (Madrid, Tecnos, 1971), planteaba ya la coexistencia de diferentes "estilos" matemáticos, entre los cuáles indicaba el operacional y el formal (precedentes de los "Haceres" discutidos más abajo). Unos años después, en *La matemática y el problema de su historia* (Tecnos, 1977), profundiza en esas cuestiones y afirma la "radical historicidad del Hacer matemático": es aquí donde por primera vez identifica el hacer figural frente al global. Ya en escritos de los años 1990 caracteriza el nuevo hacer computacional (véase por ejemplo, 'La razón matemática constructiva y sus haceres', *Mathesis* **9** (1993), 129–153). De sus últimos trabajos, mencionemos también el libro *La matemática: de sus fundamentos y crisis* (Tecnos, 1998).

José Ferreirós

Del Hacer matemático, su historia y su plasmación educativa

por

Javier de Lorenzo

Voy a desarrollar mi exposición en torno a unas Experiencias, experiencias vividas que implican, a la vez, Historia y Enseñanza de la Matemática. Experiencias individuales que, por supuesto, pretendo que no queden en mera anécdota, en simple exposición de una vivencia personal, sino que la trasciendan, que lleguen a elevarse al rango de Categoría como querría Eugenio d'Ors. Más allá de la anécdota, porque pienso que son experiencias que implican, y a

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: `josef@us.es`

la vez, tanto un panorama de la cultura matemática española en un momento muy especial de mediados del siglo XX como la concepción que del Hacer matemático he venido sosteniendo; concepción que tiene su origen, precisamente, en esas experiencias vividas.

Concepción que supone, y de partida, que el Hacer matemático no es un producto monolítico, ya acabado, sino una praxis dinámica que se va transformando y en la cual se producen rupturas epistemológicas como las que, aquí, voy a relatar. Rupturas con sus consecuencias ontológicas, epistemológicas, metodológicas asociadas. Y que entrañan, por un lado, la incorporación de nuevas ideas, conceptos, mecanismos de formación conceptual así como de demostración; por otro lado, la necesidad de reorganizar, estructurar esas ideas. Organización desde la cual se marginan conceptos, métodos, enfoques de lo que, desde esa ruptura, se considera "clásico", no propio ya del nuevo modo de hacer. Una concepción en la cual se admite que no todo está dado, de una vez y para siempre, en el universo de la Matemática, en el mundo siempre abierto de la razón conceptual.

1

Me sitúo en otro siglo, en otro milenio. 1956, Octubre, Facultad de Ciencias, Universidad Central. Mi primera clase: Geometría 1°, Paraninfo de la Facultad, 8h 30m. Debo señalar que las asignaturas de Geometría 1° y 2°, Análisis 1° y 2° las cursábamos juntos arquitectos y matemáticos.

Ya sentados, entra un señor bajito, bigote blanco, calvo, traje oscuro con chaleco y corbata..., la imagen de Henri Bergson en la fotografía clásica del filósofo francés. Todos los alumnos nos ponemos de pie –educación, autoridad, época–. El geómetra hace un gesto para que nos sentemos. Inmediato, señala las pizarras que hay tras él. Están, las dos, totalmente llenas de figuras. Ordena: "Copien"; se sienta y guarda silencio. Al cabo de un largo rato, y ya de pie, comienza a hablar señalando la primera figura, y sus primeras palabras: "un punto son dos puntos", "una recta son dos rectas"...

No comento el estupor que estas afirmaciones me produjeron, tanto por el contenido como por el castellano subyacente. Lo que importa, aquí, es:

a. *el método didáctico*: copiar lo escrito en una pizarra y comentarlo; más bien, leer o describir lo escrito. En Geometría Sintética copiar, no ir construyendo, no ir obteniendo, por cada uno de los pasos adecuados, explicando cada paso, la figura final que, de entrada, había que copiar. Una figura final resultado último de unos procesos que no se hacían visibles y permanecían ocultos hasta que se comentaban e incluso tras el comentario seguían ocultos. Y era difícil, en ocasiones, acertar con fidelidad la figura que, de entrada, se copiaba. Un método didáctico en línea opuesta, ciertamente, con cualquier metodología heurística, con lo pretendido –y por mero ejemplo– por Polya en *Matemática y razonamiento plausible*, 1953 (edn. castellana de 1966).

b. *el contenido*: la Geometría cuya enseñanza se impartía con ese método pedagógico, con esa práctica educativa, era lo que hoy se denomina Geometría Descriptiva. Hoy y desde su creación por parte de Gaspard Monge. Ante la ausencia de cualquier tipo de explicación más o menos aclaratoria, lo impartido en clase tenía que completarse por algún texto. Y el texto de apoyatura, *Curso de Geometría Métrica* de Puig Adam.

Haciendo camino, en Geometría 2° se incorporan unos elementos de Geometría Vectorial y una recta ya no era dos rectas, sino un objeto caracterizado por un vector y un punto, por un vector de posición y uno de dirección. Algo se había avanzado...

En paralelo, cabría recordar Análisis 2º impartido por Ricardo San Juan: ni una explicación en todo el curso. Se sorteaba quién iba saliendo a la pizarra para ir explicando el texto de San Juan. Quienes salían a la pizarra –y no eran vilipendiados– pasaban al examen final. La otra posibilidad de acceder a ese examen se centraba en obtener un mínimo de Notable en alguno de los exámenes parciales que se hacían en la clase de prácticas con Rodríguez Sanjuán. Todo un modelo de práctica educativa...

2

No sigo por esos recuerdos. Sí indicar que es en 3° de Facultad, curso 1958-1959, cuando se produce el momento clave para esta historia y ello en varios frentes, cada uno aportado por las disciplinas que en ese año se cursaban aunque en todos los frentes con el mismo resultado final. Y voy por alguna de esas disciplinas.

∗ Una de ellas, Geometría Proyectiva. Se impartía en dos fases: diaria de 8h a 9h de la mañana y, alterna, de 11h 30m a 12h 30m. A primera hora, con Carrasco, ayudante de la cátedra; a segunda, con el Catedrático de la asignatura, Pedro Abellanas. La disciplina, bajo el mismo título, pero el contenido, dos mundos. A las 8, y como libro auxiliar, *Elementos de Geometría Analítica* de Sixto Cámara, en la 3ª ed. de 1943, que completaba de alguna manera lo explicado en clase. A las 11h 30m, y como libro base, *Algebraic Geometric* de Emil Artin, recién editado en 1957.

Quizá a ustedes les suene más Artin que Sixto Cámara, perteneciente a lo que considerar escuela geométrica española, la de Torroja, Vegas, Rey Pastor, Álvarez Ude... El libro de Sixto Cámara es muy buen libro, una especie de enciclopedia de lo que se entendía por Geometría, y en concreto Analítica, en la primera mitad del s. XX. Incluso incorpora elementos considerados como novedades. Así, Cámara justifica incluir un capítulo dedicado al Cálculo Vectorial, cálculo que es un instrumento de la Mecánica racional y de la Física que conviene introducir también en Geometría con "el mismo rango que el método cartesiano" y no por servilismo a la Física –y voy siguiendo la justificación explícita del autor– sino porque es instrumento intrínseco de la Geometría de los espacios afines que va confundido con la euclídea en todos los libros de esta naturaleza. Cálculo Vectorial que muestra un plano superior al método cartesiano en algunas ramas como la Geometría Diferencial. Como enciclopedia se tiene desde la Geometría Métrica en el plano, el espacio, a la Proyectiva. Sixto Cámara dedica unos capítulos a la Geometría diferencial y al estudio tanto de las curvas alabeadas como al estudio de las superficies –y, en ellas, si desarrollables o no, si de curvatura constante o no...–. Debo indicar que, en 2° curso, en la disciplina de Física, se estudiaba la Teoría de Magnitudes y, en ella, vectores y tensores.

Del libro de Artin, qué voy a decir: comienza con unos elementos de teoría de conjuntos pero como mero lenguaje para poder, luego, seguir. Un lenguaje conjuntista que veíamos, aquí, por vez primera. Y ciertamente lo que sigue en el texto responde de modo pleno al título: geometría algebraica. Ontológica, metodológica, epistemológicamente, constituía un Hacer radicalmente diferente, en lo geométrico, al Hacer plasmado en la obra de Sixto Cámara, a lo que se nos presentaba a las 8h 30m. Pasar de las figuras de primera o segunda categoría, de proyectar y cortar, de elementos ideales o imaginarios y de rectas isótropas, de teoremas duales escritos a dos columnas como los de Pascal y Brianchon, de familias de curvas, de cuádricas, de clasificar haces de cónicas o de cuádricas... a demostrar el teorema fundamental de la Geometría proyectiva en el caso de las colineaciones del espacio en sí mismo apoyándose en morfismos de grupos a grupos cocientes y de estos a otros grupos, donde se manejan términos como

> Su núcleo consiste de las colineaciones que son inducidas por elementos de S pertenecientes a un automorfismo interno (p. 92)

y de aquí se pasa al plano proyectivo, a estructuras métricas sobre espacios vectoriales, al estudio de la geometría simpléctica, de la ortogonal...

Pasar de la clase de las 8h 30m de la mañana a la clase de las 11h 30m era pasar de un mundo a otro radicalmente diferente –y no sólo por el talante de los profesores que impartían cada parte de la materia–.

∗ De Geometría Proyectiva a Análisis. En Análisis, el curso estuvo centrado, en un primer cuatrimestre, en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales. Ecuación tras ecuación, regla particular tras regla particular, búsqueda del cambio de variable más adecuado. Y, de repente, se incorpora a la cátedra Alberto Dou, en Enero. Viene de Estados Unidos y trae, bajo el brazo, el libro *Theory of ordinary Differential Equations* de Coddington-Levinson editado en 1955. Y la escena se transforma. Se abandona la cuestión de resolver ecuaciones diferenciales y estudiar sus tipos, sus aplicaciones. Ahora hay que establecer, realmente, las condiciones de posibilidad de dichas ecuaciones. Para lo cual había que partir de demostraciones de existencia, de unicidad, de prolongación.

Nuevamente, aquí, dos mundos: en uno, se trataba de resolver, por el procedimiento que sea, una ecuación dada, concreta, cuyo origen suele ser el estudio de un fenómeno físico dado; en el otro, demostrar existencias de entes de una generalidad total.

Permítanme un ejemplo. Resolver la ecuación

$$y' - y - xy^2 = 0$$

pueden poner su forma general como

$$y' + P(x)y + Q(x)y^n = 0$$

con n arbitrario. Es de las primeras ecuaciones diferenciales que surgen en el Hacer matemático. Johann Bernoulli la da a luz en 1695 en *Acta Eruditorum* como reto tras sus estudios sobre la braquistócrona. Va ligada a problemas de carácter físico, trayectoria de un punto, minimalización de dicha trayectoria..., pero se independiza y se convierte en problema a resolver matemáticamente. El método para resolver esta ecuación, el dado por Leibniz en 1696, suponiendo siempre que $y \neq 0$ porque $y = 0$ constituye una solución trivial: dividir por y^n y hacer el cambio de variable $u = 1/y^{n-1}$. Se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{n-1}u' + uP(x) + Q(x) = 0$$

que es una ecuación lineal respecto a la nueva incógnita u. La ecuación de Bernoulli se ha reducido a la cuadratura de otra ecuación que, en principio, se muestra más fácil de resolver, pero hay que resolverla. En este caso, al ser ecuación lineal se intentaría resolver la ecuación homogénea asociada y así sucesivamente.

Lo que quiero subrayar con este ejemplo es el hecho de que la resolución de una ecuación diferencial –en este caso, la de Bernoulli– se apoya en una serie de reglas como la de dividir por y^n, utilizar un cambio de variable adecuado, pasar a una ecuación lineal, integrar la ecuación homogénea correspondiente, y después rehacer todos los pasos y volver al problema inicial... Son pasos obtenidos por "observación", reglas que hay que aprender, cuya justificación es de carácter pragmático: dan resultado. No son demostrativos o argumentativos, lo que entraña como consecuencia que aquí no se trata de la verdad de las proposiciones matemáticas. Término "verdad" que no tiene su campo en este tipo de Hacer; no lo tiene en los campos artísticos, técnicos en los cuales se está situado, como no lo tiene en los campos normativos o deónticos. Las normas se cumplen o no, se acierta con las reglas o no, se hace un cambio de variable o una integración por partes adecuada o se fracasa. El artista es quien domina las reglas, las maneja adecuadamente y alcanza la solución pedida.

No digamos si se plantea una ecuación como la de Ricatti

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

que, en general, como saben, no es resoluble. Si se admite que posea una solución particular se puede hacer el cambio de variable conveniente para reducir esta ecuación a una de Bernoulli y, de aquí, a la lineal correspondiente...

No entro, aquí, en los problemas que el manejo de las ecuaciones diferenciales supone en cuanto a las condiciones iniciales, problemas de contorno en el caso de que sea en derivadas parciales... Problemas que en este tipo de Hacer surgen sobre la marcha al igual que las representaciones geométricas asociadas.

Y frente a lo que supone este tipo de Hacer, rogaría que se abra el libro citado de Coddington-Levison y se comience por la demostración de existencia de solución, el teorema de existencia de Cauchy-Peano bajo las condiciones de Lipschitz por ejemplo, y de la cual los autores reconocen que es una demostración no constructiva, no hay forma de obtener una solución efectiva de lo demostrado existente y único. Aquí sí hay argumentación, sí hay elemento demostrativo y no únicamente normativo, aunque en este caso, y dando la vuelta, se procuran demostraciones por aproximaciones sucesivas que, de alguna manera, procuren procedimientos de resolución numéricos de la ecuación dada.

Se tienen dos prácticas diferentes: una, normativa; otra, demostrativa que se pretende con carácter epistémico. Este último se manifiesta no sólo en el terreno demostrativo, sino también en la introducción de nociones como la de espacios métricos, conceptos topológicos... Con una diferencia: en la primera se llega a la solución concreta (en el ejemplo particular que he puesto esa solución es $y = 1/(1-x)+\alpha e^{-x}$). Esto no ocurre con las demostraciones de carácter existencial que, en principio, son no constructivas y por ello, plantean la necesidad de buscar procesos de aproximaciones de distintos tipos, analíticos, numéricos, incluso gráficos. Es decir, desde lo demostrativo existencial tiene que llegarse, y es una vuelta, a procesos normativos que, sin embargo, parecen quedar en segundo plano.

∗ No digamos en Álgebra, terreno en el que me voy a detener algo más. Manejábamos, en la Facultad, las obras de Rey Pastor tanto para los cursos de Análisis como para los de Álgebra. En concreto, y en este terreno, menciono sus *Lecciones de Álgebra* en la ed. de 1957 –es sobre la que yo, al menos, trabajé–, editada el mismo año que la mencionada de Artin. Oficialmente era la 4ª edición aunque tan revisada respecto a las anteriores que puede considerarse obra original.

En este libro Rey Pastor lanza anatemas por todos sitios. Rey Pastor está señalando de manera indirecta lo que yo, en mi experiencia, estaba viviendo: la existencia de dos Haceres matemáticos muy diferentes. Él, en su práctica matemática y en polémica; yo, en la asunción práctica de estudiante.

En su libro Rey Pastor recuerda la definición de álgebra, el objetivo central de esta "vetusta" disciplina. Para ello, retoma la definición dada por el algebrista alemán Hasse en 1927:

> Es conjunto de métodos formales que permiten resolver ecuaciones formadas mediante las cuatro operaciones elementales con elementos conocidos y desconocidos.

Álgebra como serie de métodos, de normas que permiten resolver ecuaciones algebraicas. Y al planteamiento de esas ecuaciones se llega desde el enunciado de problemas procedentes de muy diferentes disciplinas. De modo inmediato, y en contraposición, se agrega otra concepción de álgebra. Rey Pastor, 1957, toma para ello la dada por Bourbaki, con la previa justificación histórico-evolutiva del 'matemático' francés:

> Lo que ha constituido hasta la mitad del s. XIX el objeto principal del Álgebra clásica: la resolución de las ecuaciones algebraicas

Pero, ahora, se trata de otra cosa. Afirma Bourbaki:

> Consideramos hoy como el problema esencial del álgebra el estudio de las estructuras algebraicas, por sí mismas.

Naturalmente la cita de un algebrista de 1927 invalida la afirmación interesadamente histórica de Bourbaki. Esa cita implica que no sólo hasta mediados del s. XIX el objeto principal del Álgebra clásica era la resolución de las ecuaciones algebraicas, sino que hasta mediados del s. XX hay matemáticos que continúan aceptando ese enfoque.

Si se deja a un lado el problema histórico –y también el originado por términos como "el objeto del Álgebra" como si hubiera tal ente que fijara sus objetivos y sus problemas y no fuera resultado de quienes lo producen– cabe detenerse tanto en el contenido como en el enfoque que las citas anteriores entrañan: en uno –versión "clásica" – la disciplina se constituye como un arte, como una serie de métodos, reglas o normas para la resolución de; en otro –versión "moderna" – se constituye como una ontología, aparece como el estudio de un ente ontológico al que atribuir o no propiedades: la estructura algebraica. Ente ontológico que habrá que caracterizar, definir de alguna manera. Como la definición no entraña la existencia de lo definido y como no parece que se tenga un referencial material existente por ese mundo de abstracciones al que dar simplemente nombre, habrá que establecer mecanismos que aseguren la existencia de lo definido. También habrá que establecer métodos para comparar, relacionar esos entes abstractos, las estructuras algebraicas, métodos de relacionar que vendrán dados por la noción de función que mantiene la forma de las estructuras, por la noción de morfismo.

En cualquier caso, dos concepciones radicalmente diferentes. Lo mismo que he mencionado en el caso de la Geometría Proyectiva, del Análisis donde el estudio de las ecuaciones diferenciales como un auténtico arte, con sus reglas y normas, se transforma y se pasa a manejar demostraciones de existencia y unicidad de lo demostrado existente. Se pasa de un Hacer normativo apoyado en lo Figural concreto a un mundo ontológico que exige una metodología distinta y, con ello, el planteamiento epistemológico de cómo alcanzar el conocimiento de ese mundo ontológico. En su versión clásica, era claro: por aprendizaje, con ensayo y error, de las reglas más adecuadas. Pero en versión moderna, ¿bastaba el proceso argumentativo?

Para seguir con Rey Pastor, con sus anatemas, se tiene el reconocimiento explícito de una presión ambiente a la que él se ha resistido. Reconoce:

> Ha hecho moda iniciar todos los tratados con un cuerpo doctrinal...

Cuerpo doctrinal que se le muestra como puro esnobismo frente al que hay que reaccionar porque supone la aceptación de una postura que va más allá de lo puramente conceptual. Hay que reaccionar frente a

> La posición del enfervorizado neófito en la nueva religión,

y la religión no pertenece a un Ámbito conceptual sino a un Ámbito religioso. Para Rey Pastor,

> Muchos lectores aman y admiran la nebulosidad. Queremos llevar al ánimo de los no pedantes la convicción...

Lo que no ve Rey Pastor es que si el objeto ha cambiado hasta de naturaleza ontológica es que ese objeto, como acabo de indicar, tiene que ser definido, caracterizado de alguna manera. Desde el arte algebraico la definición existencial sobra porque el objeto está dado de antemano y sólo requiere del nombre convencional que suele ir ligado a quien formula y plantea por vez primera ese objeto, esa ecuación –en el ejemplo dado, ecuación diferencial *de* Bernoulli, *de* Ricatti...–. Ahora se trata de algo más que de una mera asignación convencional de nombre a algo ya existente o construido, ahora hay que dar existencia a un ente ontológico y para ello se requiere de lo que Rey Pastor denomina "cuerpo doctrinal nuevo".

Cuerpo doctrinal apoyado en un lenguaje diferente al "natural", un lenguaje que aporta la teoría de conjuntos pero como mero lenguaje y no como disciplina en sí, al igual que la incorporación de unos caracteres o ideogramas que simbolicen nociones como la de cuantificación sin, por ello, desarrollar una disciplina como la Lógica, sea del nivel que sea. Junto a este lenguaje ideográfico –lógico-conjuntista–, hay que aceptar mecanismos de formación conceptual, de definición como la definición por abstracción –por relación de equivalencia o por el dato previo de una función–, o la definición implícita o axiomática, mecanismos que llevan al manejo de clases como nuevos objetos o a establecer la definición de estructuras –que se pueden considerar objetos de segundo nivel–.

El punto de partida es diferente y las prácticas han de ser diferentes. El Álgebra en su versión "clásica" de resolución de ecuaciones algebraicas no es lo mismo que el Álgebra en su versión "moderna" de estudio de estructuras algebraicas por sí mismas. Ambas tienen muy poco en común y, para insistir en términos griegos, una se muestra como saber productivo o artístico y la otra como un saber epistémico. Por ello su propia estructura organizativa como saber, como teoría, tampoco puede ser la misma. Rey Pastor lo llega a reconocer cuando menciona lo que se hace en Álgebra moderna:

> Es esta la vieja ilusión cartesiana de edificar en pirámide el saber humano, para hacer brotar en cascada todas las verdades; ilusión en que recayó Cantor y en que reincidió la escuela algebrista de Emmy Noether.

E insiste en que los neófitos o pedantes, los adictos a la nueva religión no han tenido en cuenta la aparición de paradojas como la de Russell ni la de figuras como Brouwer...

Aquí se tiene una nítida diferencia: en la versión "moderna", desde el lenguaje conjuntista, con los mecanismos de definición indicados, con los procesos demostrativos existenciales no constructivos –como el método de la diagonal, la reducción al absurdo–, se van obteniendo, en cascada y por el mero uso de la derivación formal, todas las "verdades". Enfrentado, en el Hacer Figural, en la resolución de ecuaciones –sean algebraicas, diferenciales...– no hay tal camino, no hay tal enlace. Como mucho, reducciones de un problema, de una ecuación, a otro más fácil, manejo de analogías... La estructura organizativa ha de ser, por ello, diferente.

Y es lo que trata de poner de relieve Rey Pastor en su libro, en el cual y por supuesto no cierra la puerta a los nuevos objetos algebraicos, a las estructuras. En su libro se trata, efectivamente, de resolver ecuaciones algebraicas y dar aplicaciones o indicar el origen de las mismas. Por un ejemplo, se llegan a tratar las ecuaciones ciclotómicas con la construcción geométrica asociada de los polígonos regulares inscritos en una circunferencia; se habla de los cuaterniones y del mantenimiento de las leyes formales... pero también, y entre otras cosas, se pretende la demostración del teorema fundamental del álgebra. Con muchas advertencias: básicamente la de que su demostración no es puramente algebraica ya que requiere la admisión del número irracional, tanto real como complejo. Y sin esta admisión "carece de sentido el teorema de Gauss". Advertencia reiterada porque, para Rey Pastor,

> Abierta esa puerta, por ella pasa conjuntamente, quiérase o no, el huésped indeseable.

Advertencia porque para el purista no debe abrirse esa puerta que él, sin embargo, abre. Permítanme que siga citando a Rey Pastor:

> Después de haber lanzado a la venerable dama a tantas aventuras, extramuros de la Matemática honesta, ¿os hacéis los pudibundos, en nombre del purismo algebraico?

Y se llega, en el libro de Rey Pastor, a la resolvente de Galois y, a partir de ese momento, se pasa a caracterizar estructuras algebraicas como el grupo –siempre apoyado en el grupo concreto de las sustituciones–, anillo, ideal, campo o cuerpo...

Como punto de partida, la ecuación algebraica, los métodos de resolución –y todo lo que eso comporta–. Como punto de llegada, estructuras a las que desde esos métodos se da paso, desde los grupos a los cuerpos finitos de Galois, y así sucesivamente. La línea seguida, el plan organizativo en este enfoque de álgebra, versión "clásica", es una organización pretendidamente genética que va desde el objeto primario de esta vetusta disciplina hasta lo más abstracto de los nuevos conceptos que se van incorporando de manera orgánica.

Frente a esa línea aparece la estructura organizativa de la "versión moderna" en la cual se invierte el proceso. Inversión que supone partir desde lo que es el final para lo genético, supone tomar como punto de partida los nuevos conceptos, totalmente abstractos. Rey Pastor admitiría tal enfoque, a pesar de su esnobismo, siempre que desde este punto de partida se llegara al origen, se llegara a la resolución de las ecuaciones algebraicas. Pero Rey Pastor observa que nunca se llega a ese inicio...

Habría que indicar que, más aún, no tiene por qué llegarse porque en la "versión moderna" no se tiene ese objetivo: basta recordar la definición de Bourbaki. Y olvidar esta afirmación ha entrañado consecuencias que se han centrado en 'reproches' a los que luego me voy a referir. Olvidar esta afirmación es no ver que, por ejemplo, en aritmética Figural se parte del contar y no del intento de definir lo que sea la esencia del número. Un contar como proceso en el cual prima lo ordinal y, con ello, la inducción o recursión, sobre el aspecto cardinal. Mientras que en el Hacer Global el objetivo primario es caracterizar, definir un ente ontológico como el número cardinal finito. Con lo cual lo primero, en él, es la multiplicidad de sistemas o de conjuntos; a continuación, la biyección entre esos sistemas; consecuencia de esta biyección, las clases de equivalencia que se consideran, ahora, los números cardinales; finalmente, de entre los cardinales así definidos, hay que diferenciar los cardinales finitos o números naturales. Y después de todo este proceso, se establecen en el sistema de números naturales o cardinales finitos unas operaciones de las que hay que demostrar que satisfacen unas condiciones, las de permanencia de las leyes formales. Y se hace la afirmación de que, con ellas, se puede contar. Es una concepción ontológica en la cual prima lo cardinal sobre lo ordinal, en la cual se muestra como radicalmente secundario el proceso de contar, que no es el objetivo primario.

∗ Recuerdo: estábamos en 1958-59. De inmediato, cuarto, quinto cursos. Y aquí había que elegir una especialidad, aun dentro de la licenciatura de Matemática: Astronomía, Estadística, Metodología, Matemática "pura". Continúo con esta última, como la más propiamente matemática...

En ella, y ya de modo definitivo, se sustituyó a Rey Pastor por otra obra, muy buena ciertamente: *Álgebra conmutativa* de Zariski-Samuel. El primer volumen se acababa de editar, 1958, y Germán Ancochea lo trae bajo el brazo desde Estados Unidos. Su mundo no es el de las ecuaciones algebraicas. Grupos, ideales, anillos, módulos, anillos cociente... y morfismos entre unos y otros. Supone, en el lector, el previo conocimiento tanto de un lenguaje, el conjuntista, como de una metodología. Se manejan las estructuras como objetos de partida, estructuras dadas en su globalidad; se establecen morfismos entre las mismas, se obtienen los núcleos, los conjuntos cociente correspondientes que son, también, estructuras y, por ello, entran a formar parte de dichas globalidades... Un Hacer Global, apoyado en el lenguaje conjuntista, con objetos de segundo nivel, ya estructurados.

3

Podría alargarme en otros campos como la Geometría Diferencial. Frente a una obra excepcional como la de Struik, llena de figuras y sugerencias, de posibles aportes a la intuición geométrica del matemático, el librito de Lichnerowicz, el paso al lenguaje de fibrados... Pero creo que ya es suficiente para mostrar la clave de esta historia.

Aunque sí insisto en resaltar las fechas, recordar la primera edición de algunos textos extranjeros que, de modo inmediato, y a pesar de muchos tópicos que hay sobre esta época en España, se pasaron a estudiar en la Universidad española. Las obras de Artin, Zariski, Samuel, Coddington..., por no citar a Bourbaki –cuyos elementos de topología, junto a la obra *An Introduction to Algebraic Topology* de Wallace editada en 1957, estudiamos en 5°–. Los clásicos autores españoles, ciertamente, iban quedando marginados. Con esas citas de autores y fechas, estoy haciendo un poco de historia, dando fe del momento en el que algunos matemáticos españoles –al menos en una de las tres Facultades de Matemáticas que entonces había en España– se convertían y pasaban a practicar un nuevo modo de hacer matemático, con todas las consecuencias que ello suponía. Que esta incorporación quedara integrada de modo que en ella se alcanzara el nivel de investigación original, es otro problema, lo mismo que las dificultades y reticencias que entrañó su imposición y de las que he citado, como ejemplo, la posición mantenida por Rey Pastor.

Lo que no sabíamos, al menos yo no lo supe en esos momentos, es que en 1959 se celebraba el Coloquio de Royaumont para lograr unas *Mathématiques nouvelles*. Coloquio en el cual Jean Dieudonné lanzaba su grito *A bas Euclide!* Que estaba en germen, en marcha, una reforma que daría paso a la enseñanza de una *matemática moderna* bajo el ropaje terminológico de “nueva”. Quizá Rey Pastor sí lo supiera o intuyera que se estaba gestando tal reforma y de ahí su posición, sus intentos de rechazo a la misma, su deseo de mantener aquella matemática que él había trabajado y en la cual todavía creía.

Resultado de esa reforma que se impuso en algunos países, entre ellos España –y que ahora como profesor recién llegado me tocó vivir y aplicar en las aulas–, fueron las inmediatas críticas, los reproches resumidos en el lema “Juancito no sabe sumar”. Críticas que asume el mismo Dieudonné, quien con su *A bas Euclide!* no atacaba realmente a Euclides sino al Hacer Figural, al hacer normativo matemático. Cito a Dieudonné porque en 1968 trata de situar el problema que las reformas han provocado, trata de buscar una solución al mismo. Con palabras que van en paralelo, curiosamente, a las de Rey Pastor

–hasta en el tono, con sus correspondientes anatemas y ataques– aunque sus conclusiones son, evidentemente, opuestas.

Perdón por la extensión de la cita pero creo que no tiene desperdicio. La tomo del prefacio al libro *Calcul Infinitesimal*, 1968. Comienza:

> "Los estudiantes de hoy no saben calcular": tal es el reproche que se dirige frecuentemente a la enseñanza actual de las matemáticas por físicos e ingenieros, y es preciso aceptar que ese reproche está justificado. Cuando se ha visto a un estudiante de segundo o tercer año en la Facultad de Ciencias esforzarse durante diez minutos para hacer un cambio de variables o una integración por partes, no se puede estar más que enormemente irritado, sobre todo (como ocurre en estos casos) si el mismo estudiante condimenta su ignorancia y su torpeza con una jerga pretenciosa e inútil que por otro lado no ha sabido asimilar.
>
> No es necesario repetir que no hay "matemática moderna" oponiéndose a las "matemáticas clásicas", sino simplemente una matemática de hoy que continúa a la de ayer sin ruptura profunda, y se liga ante todo a resolver los grandes problemas que nos han legado nuestros predecesores. Si, para hacer esto, se han tenido que desarrollar nuevas nociones abstractas en gran número, es que esas nociones han permitido frecuentemente, concentrando por así decir la luz sobre el corazón de los problemas y eliminando los detalles inútiles, progresar a paso de gigantes en dominios aún considerados como inaccesibles no hace cincuenta años; los matemáticos que hacen abstracción por el amor de la abstracción frecuentemente son los más mediocres.
>
> Una consecuencia no despreciable de esta tendencia ha sido la "limpieza" que estas nociones nuevas han permitido hacer en la enseñanza de base de las matemáticas (sobre todo en álgebra y en geometría), que ridículas tradiciones encumbraban de necedades y desarrollos perfectamente inútiles e incluso nocivos. Pero bien entendido la sustancia de las matemáticas llamadas "clásicas" ha quedado intacta, y la base del análisis moderno es siempre el maravilloso útil forjado por los matemáticos de los tres últimos siglos, el Cálculo Infinitesimal; pretender despreciarlo por situarse de entrada en el Análisis Funcional más reciente, es construir sobre la arena e ir derecho a la esterilidad y a la verborrea.

Para Dieudonné no hay ruptura "profunda" pero sí un escollo difícil de salvar. Escollo porque, en el fondo, y aunque no lo reconozca, la ruptura sí existe. Pero existe, en el sentir de Dieudonné, en la práctica docente. Por un lado se encuentra

> Una enseñanza secundaria en manos de un mandarinato alejado de la matemática viva desde hace ochenta años y exclusivamente dedicado a la contemplación de su ombligo

Y por otro lado,

> La enseñanza del Análisis moderno dado en las Facultades que debe orientar a la investigación.

Como solución, pero siempre para tratar de mantener esa matemática "moderna", reformar y, sobre todo, limpiar la enseñanza. Sin embargo Dieudonné se ve obligado, no sé si muy a pesar suyo, a precisar algunas cuestiones sobre todo con vistas a las exigencias de físicos e ingenieros precisamente. Precisión, aquí, en cuanto al Cálculo Infinitesimal, dejando a un lado los terrenos del Álgebra y la Geometría que parecen haber sido limpiados ya, quizá recordando las consecuencias de su soflama de Royaumont.

Cara a ingenieros y físicos reconoce que, junto al nuevo Análisis de las Facultades y que se plasma en particular en el Análisis funcional, sigue existiendo un viejo Cálculo infinitesimal. En él no se trata tanto de demostrar como de calcular, y de ahí su nombre. Con unos matices: es un cálculo que no se apoya en el cálculo algebraico –con lo cual parece admitir, de modo implícito, la existencia del mismo– cuyo objetivo es establecer igualdades o, en términos clásicos, resolver ecuaciones algebraicas. De lo que se trata en el Cálculo Infinitesimal es de establecer aproximaciones, porque no es otra cosa que cálculo numérico. De lo que se trata es de mayorar, minorar, acotar. Porque quien dice cálculo numérico no dice otra cosa que aproximación. Parece que se mantiene la vieja idea de Weierstrass, en el fondo, aunque hay una variación sutil, el acento recae en el cálculo y hay una marginación, conceptual por supuesto, de lo estrictamente demostrativo.

Como se trata de mayorar, minorar, acotar, un número real ya no es un ente ontológico caracterizado por una cortadura de Dedekind, o por una clase de equivalencia de sucesiones convergentes de números racionales módulo las sucesiones nulas o por unos símbolos para caracterizar un punto de la recta continua. Un número real es un "proceso de cálculo aproximado", con la aproximación que el matemático desea como arbitrariamente pequeña, aunque quien lo usa se contenta con menos.

Con este enfoque Dieudonné reafirmará que en el Cálculo no se debe introducir noción alguna que no sea susceptible de evaluación numérica aproximada. Porque se está en terreno numérico, de cálculos aproximados. Sólo después de haber adquirido una idea "intuitiva" de las operaciones del Cálculo Infinitesimal, el matemático o el físico o el ingeniero habrán adquirido el "sentido del Análisis".

El escollo parece tener solución, al menos en estos terrenos: en primer lugar, aprender el Cálculo enfocado como cálculo numérico de aproximaciones apoyado en reglas, en normas; es decir, un Hacer artístico pero ahora de carácter Computacional: procesos de cálculo. Sólo después de su aprendizaje se tendrá el "sentido del Análisis", sólo después de dominar el Cálculo se llega a la maestría que el investigador requiere y ya en los terrenos del auténtico Análisis. Solución que recuerda la exigencia que plantea Bourbaki al comienzo de sus *Elementos*: sólo se requiere, para seguirlos, saber leer y calcular, únicamente se requiere una cierta madurez matemática, aunque no se especifique cómo se adquiere la misma.

4

Independiente a la solución que propone, las afirmaciones de Dieudonné, la concepción que subyace a su panfleto introductorio, a sus anatemas, no es otra que la reafirmación de lo que en la experiencia como estudiante había yo vivido y que también Rey Pastor había indicado, aunque no, evidentemente, con el sentido que yo les doy. Que el Álgebra, las Ecuaciones Diferenciales, la Geometría Diferencial, la Geometría "clásicas" eran saberes apoyados en métodos, normas, reglas para resolver ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, problemas geométricos... Donde la demostración queda en el plano de la evidencia y no en el de la derivación formal.

Y todo ello constituye un Hacer, un hacer matemático en el que se elaboran reglas para la resolución de problemas. Reglas que hay que dominar por aprendizaje y no por deducción alguna. No hay, en este tipo de hacer, lo que se denominan demostraciones en el sentido formal del término. La demostración, aquí, es una construcción en el sentido kantiano, y me remito al ejemplo dado por Kant de la suma de los ángulos de un triángulo donde la demostración va guiada por el contenido de lo que pretende demostrarse.

En este Hacer el matemático parte de un objeto o problema en su singularidad concreta, con sus definiciones correspondientes y trata de establecer sus propiedades, de resolver el problema mediante la construcción y correcta aplicación de una serie de normas o reglas que ha de elaborar en cada caso singular y concreto, mediante lo que cabría calificar de principios regulativos. Un Hacer que se muestra, así, como un Arte o técnica, conjunto de habilidades y conocimientos prácticos orientados hacia la resolución de problemas de origen, también, práctico.

Con el reconocimiento de que, haciendo camino, también al matemático se le irán presentando problemas en el interior de su Hacer, de su praxis. Básicamente, los mencionados de establecer las normas o reglas adecuadas, los principios regulativos para cada sector en que vaya desarrollando su praxis y, con ellos, tratar de solucionar los problemas correspondientes. Lo cual supone un doble papel del matemático en su hacer: resolver problemas, establecer las técnicas o reglas, los principios regulativos, para dicha resolución. Pero también valorar, por adecuadas o no, dichas reglas y llegar a establecer, constitutivamente, el campo de juego en el que las mismas tengan cabida, campo de juego al que hay que, además, organizar. Organización en sistema teórico que no implica, en modo alguno, que esa organización sea de carácter axiomático, al estilo euclídeo. Las disciplinas se pueden organizar, sistematizar sin requerir de la axiomatización. La teoría de la divisibilidad euclídea está perfectamente organizada, por ejemplo, aunque no axiomatizada. Y no hago referencia sólo a Euclides, sino también a la obra contenida en *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss.

Con una precisión: es un Hacer en el que no se elimina la demostración –sería impensable– pero se acepta que, y aquí vuelvo a palabras de Dieudonné, las demostraciones correctas no son nunca más que "una puesta en forma" de la intuición. Puesta en forma que posibilita enlazar campos insospechados, crear nuevos métodos, nuevos conceptos, nuevos campos de trabajo y, por supuesto, "demostrar" la proposición intuida.

Frente a este Hacer Figural, se alza otro tipo de Hacer diferente, que parte no del dato o problema singular y concreto, dato previamente existente, sino de la globalidad de objetos. Globalidad más o menos estructurada que, para ser expresada, parte de un lenguaje conjuntista pero como lenguaje que supone un marco-base conceptual, pero no es un hacer conjuntista en sí, porque en el Hacer Global los sistemas que se manejan han de encontrarse estructurados y no basta el dato del conjunto, sino la estructura que toma como base uno u otro sistema: de lo que se trata es de manejar fibrados, álgebras, espacios topológicos...

Desde algunos intentos de fundamentación se quiere que el punto de partida sea, precisamente, la Teoría Axiomática de Conjuntos que, a su vez, exigiría de una fundamentación en el lenguaje de la Lógica, convertida la Lógica, a su vez, en Teoría Axiomática Formal, lo que conduce al manejo de los sistemas formales. Enfoque axiomático-formal que, de alguna manera, ha infectado parte de este Hacer, que es sin embargo independiente del mismo. Independencia que se observa sin más que distinguir lo que es la definición axiomática de lo que es el método organizador axiomático. Conceptualmente muy diferentes a pesar de su confusión por parte de los fundamentadores. En el Hacer Global se manejan objetos ontológicos que no entran en el Hacer Figural y exige mecanismos definitorios –a los que ya he hecho referencia– y demostrativos distintos –en general no constructivos sino puramente existenciales–. Lo normativo queda suplantado por el juicio proposicional que ya es veritativo pero donde la verdad no hace referencia a adecuación de pensamiento a objeto sino a verdad como derivación a partir de unos principios dados. El papel de la evidencia como auto-afección del espíritu de quien actúa y trabaja queda reemplazado por el papel de la evidencia de la sucesión de proposiciones. Ello exige que la demostración quede fundamentada en unas primeras verdades y se realice por el dato previo de unas reglas de transformación sintácticas explícitamente establecidas. Las demostraciones correctas pierden el viejo sentido de ser simples puestas en forma de lo que la previa intuición, con su carga semántica de contenidos, había alcanzado. Algo formulado por Frege cuando escribía en *Fundamentos de la Aritmética*,

> El desarrollo posterior ha mostrado cada vez más claramente que en las matemáticas no es suficiente un convencimiento puramente moral, apoyado por muchas aplicaciones convincentes. Para muchas cosas, que antes pasaban por evidentes, se exige ahora una demostración.

No sólo demostración de lo que antes era evidente. En el Hacer Global hubo que redefinir viejos conceptos considerados como evidentes por estimarlos como dados o existentes en su individualidad singular, concreta y que ahora dejaban de serlo porque el punto de partida ya no era esa concreción singular existente, sino el sistema de globalidades actualmente dado –lo finito se muestra, aquí, subsidiario de lo infinito–. Nociones como las de función, continuidad, diferenciabilidad, curva "han demostrado necesitar definiciones más precisas".

Pero, a la vez, las demostraciones adoptan otro papel que va más allá de convertir una proposición en teorema. Ahora la demostración pasa a dotar de existencia a lo definido. Dotar de existencia a través de la demostración de consistencia que, de no hacerse así, tiene que dar la vuelta y limitarse a dotar de existencia a través del modelo. Con ello, y simultáneo, ese carácter existencial posee un carácter básicamente no constructivo en el sentido de que en ellas no se muestra el objeto demostrado, no se da efectivamente la función de elección por ejemplo, ni en el caso de la demostración por el método de la diagonal se da el número o función supernumerario.

Y si he puesto un ejemplo de Hacer clásico, de un Hacer Figural, cabría poner, aquí, un ejemplo de Hacer Global. En gracia a la brevedad, la demostración que surge de la equipotencia de los números algebraicos con los naturales. Como el cuerpo de los reales posee la potencia del continuo y esta potencia es mayor que la numerable –demostración por el método de la diagonal de Cantor–, resulta que en el cuerpo de los números reales deben existir, junto a los números algebraicos que son numerables, otros números, los trascendentes. Es una demostración existencial: afirma la existencia de un tipo determinado de números, pero no es constructiva. Si alguien pide que se le muestre uno de los números trascendentes de los que se afirma la existencia, no hay forma de mostrar, por este camino, ninguno.

Se puede ir más allá. Como los números reales se componen, por la demostración anterior, de algebraicos y trascendentes, que son disjuntos entre sí y, por el método cantoriano de la diagonal, la potencia del cuerpo de los reales es mayor que la potencia de lo numerable, resulta que al tener los algebraicos potencia numerable, los trascendentes han de tener la potencia del continuo. Con lo cual no sólo se asegura la existencia de unos números sino que se establece su cardinalidad, su potencia, pero sin ser capaces de mostrar ninguno de esos números que pueblan el universo matemático hasta en potencia mayor de lo expresable en el lenguaje que manejamos.

Para ser consecuentes, el enfoque del Hacer Global supone la necesidad de establecer de manera absolutamente precisa las suposiciones de partida así como tratar de evitar el salto en las derivaciones que se dotan de un carácter, a veces, excesivamente sintáctico. Y aunque la demostración pueda apoyarse en figuras, en esquemas, esa demostración se quiere que sea radicalmente independiente de las mismas, la figura y el contenido semánticos como ayuda heurística que puede facilitar la inteligencia y fijar la atención de lo que se quiere decir pero deben desaparecer como el andamio en la construcción de un edificio. Y todo porque la clave, ahora, se centra en que la demostración es una argumentación que concluye por la fuerza de la forma y no por la carga semántica de los elementos que en ella entran en juego. He dicho "para ser consecuentes" en el interior de esta praxis, pero con el reconocimiento de que no hay matemático que lo sea y citaría el ejemplo dado por Godement, la metáfora del alpinista que se fijara en la composición atómica de la roca para clavar la pica con la que pretende la escalada...[2].

Aquí se tiene una de las claves para el paso, mediante una formalización adecuada, a lo que calificar de Hacer computacional: la supresión de la figura y el contenido semántico en la demostración posibilitan que la sucesión formal en la que consiste la derivación sintáctica sea enfocada como resultado de un algoritmo. Con un paso intermedio: porque hay que explicitar, codificar las reglas demostrativas. Algo que, en un primer momento, no se hizo cuando se pretendió fundamentar la Matemática en la Lógica: ni Frege, ni Russell-Whitehead, por ejemplo, establecieron las reglas de derivación de manera explícita. Incluso en los primeros momentos se identificaron los mecanismos demostrativos con las proposiciones que las expresaban.

Sin embargo, explicitada la diferencia, esta puede plasmarse en una codificación conveniente y pueden anteponerse las reglas a los juicios: quiero decir, puede formularse la Lógica mediante reglas de deducción que conducen a un Cálculo de Deducción Natural. Las reglas no son verdaderas o falsas sino normas que dan resultado aunque se justifican al indicar que establecen, en principio, la introducción y la eliminación de los operadores lógicos.

Bien es verdad que en la Lógica clásica de primer orden y gracias al Teorema de Deducción la identificación entre regla y juicio que la expresa podía ser justificada. Pero este mismo teorema planteó, a la vez, el papel de las reglas derivativas: Perdían el carácter funcional-veritativo asignado a las proposiciones de cualquier sistema formal, en particular de la Lógica, y posibilitaba la idea de que la Lógica no es más que Cálculo porque bastan las reglas para elaborar el sistema formal. Se puede enfocar la propia Lógica como disciplina de carácter operacional más que veritativo.

Con ello se produce una inversión conceptual respecto a la concepción fregeana donde la Lógica descubre las leyes del ser verdadero y donde la verdad del sistema reside en los axiomas, para convertirse ahora en un sistema de reglas donde la inferencia se muestra tributaria del sistema de reglas elegido. Un teorema no es un juicio verdadero porque lo es el sistema de axiomas del

[2]R. Godement, *Álgebra* (Madrid, Tecnos, 1967), p. 29.

cual se deriva, sino que cabe atribuirle una verdad relativa al sistema de reglas elegido. Consecuente, se plantea la necesidad de especificar, en cada momento, el sistema L en el cual una proposición se convierte en teorema.

Lo que me importa destacar, aquí, es que desde esta inversión, se da paso a un nuevo enfoque de Hacer incluso de lo que podría ser considerado por algunos como el Fundamento de la Matemática, la Lógica formal, convertida en sistema de reglas que pueden codificarse mediante procesos de carácter algorítmico. La Lógica vuelve a caer en el Sueño de Leibniz donde se identifica con el Cálculo. Vuelve la igualdad Razonar = Calcular a pesar de los problemas que plantean los problemas de indecidibilidad.

5

Frente al Hacer Figural, el Hacer que he calificado de Global requirió de reformas que supusieron una limpieza –y subrayo el término manejado por Dieudonné–. Y también recuerdo las palabras de Rey Pastor del "enfervorizado neófito en la nueva religión"... Una limpieza que, en parte, me tocó vivir como profesor que, desde luego, no pretendía mandarinato alguno para quedarse contemplando su ombligo.

Esa limpieza, en la Facultad, supuso la supresión de unas materias externas y el cambio estructural, profundo, de unas materias internas. Supuso el paso al nuevo modo de hacer con ruptura total respecto al Hacer anterior, y en principio con el mismo resultado que Dieudonné denuncia para el caso francés. Una ruptura por la cual los alumnos de matemáticas no sabían calcular, resolver una ecuación diferencial o una algebraica, o tenían dificultades para realizar una integración por partes, unos cambios de variables adecuados. El reproche, erróneo porque los objetivos habían cambiado. Ahora, en el sentir de Dieudonné, parecía que esa praxis ya la debían dominar al llegar a la Universidad y había que recargar la enseñanza secundaria precisamente con lo que se limpiaba en las Facultades y, naturalmente, ello implicaba que había que limpiar también la enseñanza secundaria de ridículas tradiciones que mantenían necedades y desarrollos inútiles e incluso nocivos, sobre todo en álgebra y geometría –son los anatemas que he citado de Dieudonné–. Con lo cual, también en la secundaria se imponía un Hacer Global, pero banalizado: Juancito no tenía por qué saber sumar, porque no se tenía el objetivo de que supiera contar sino captar unos entes como los cardinales finitos...

En la Universidad, de las materias externas, la limpieza se llevó por delante las que se han calificado tradicionalmente como propias de la Matemática aplicada. Recuerdo aquellas que, en los años que he ido indicando, estudié en la Facultad. Astronomía, que era claramente de posición, suprimida. Lo mismo que Física general de 1°, Mecánica o Teoría de magnitudes de 2°, Óptica de 3°, Mecánica racional de 4°. La formación del matemático en ruptura, en escisión con uno de sus campos más propios, la Física. Y como matemático ya "puro", limpieza en terrenos como los geométricos donde la Geometría Descriptiva quedó para el Dibujo Técnico, la Geometría sintética aun potenciada con instrumentos como el cálculo vectorial eliminada, lo mismo que los enfoques "clásicos" del álgebra. La intuición geométrica, en movimiento rupturista pendular, fue barrida en beneficio de una visión pretendidamente estructural-formalista.

Una limpieza que, de alguna manera, recuerda la producida al surgir la Ciencia en los siglos XVI y XVII. De las materias que constituían el *quadrivium* y que habían sido las propias del matemático, del geómetra, la Música quedó eliminada al igual que la Astronomía-Astrología o la Esférica. En su lugar, y junto a las viejas artes Geometría y Aritmética, van a surgir disciplinas como el Álgebra y, sobre todo, el Análisis Diferencial e Integral, el Cálculo Infinitesimal...

Una limpieza en la Enseñanza en la cual intervino un factor ideológico, fundamentalmente en la enseñanza media: frente a la autoridad, la didáctica pedagógica y un pretendido aprendizaje personalizado, incentivado y sin acudir a la memoria y al esfuerzo: todo se descubría deductivamente. Y el enfoque formal primó sobre los contenidos, sobre la técnica, y se pasó a potenciar una jerga "pretenciosa e inútil". Los pedagogos y metodólogos siguieron líneas como las de la Epistemología genética de Piaget donde el individuo se desarrolla siguiendo las tres grandes estructuras-madre de Bourbaki: topológica, algebraica y reticular. Y había que enseñar, genética y obligatoriamente, esas estructuras a partir de un lenguaje conjuntista que, en ese nivel, se banalizó en un lenguaje de gomas de colores... Aunque también, y es justo reconocerlo, surgen movimientos de renovación pedagógica en los sesenta como los de Papy en Bélgica, Troudeau en Francia, Castelnuovo en Italia, o los que siguieron a Puig Adam o al grupo Cero en España...

No era simple limpieza. Dejando a un lado los intereses –militares, políticos, ideológicos– subyacentes a la reforma, y en el campo del Hacer matemático, era la afirmación de que existía una ruptura en el mismo. Una ruptura que implicaba una inversión epistemológica que ponía de relieve la existencia de dos Haceres muy diferentes. Haceres con bases que vengo denominando, hace ya tiempo, Figural y Global. Bien entendido que el Hacer Global no surge en los años en que se produce la limpieza, las reformas pedagógicas en general, sino que afinca sus raíces en la Matemática de finales del s. XIX, tras los trabajos de Dedekind, Cantor..., con la discretización del continuo por la escuela de Weiertrass, y que ya puede rastrearse en el mismo Gauss con sus trabajos sobre congruencias módulo un entero. He tratado de indicar alguno de los rasgos más característicos de estos tipos de Hacer al ir haciendo camino, contando experiencias vividas, no de simples lecturas.

6

Haciendo camino he mencionado no sólo la existencia de dos Haceres matemáticos como el Figural y el Global, sino que también se ha colado otro, el Computacional. Este último incluso está explícito en el pasaje que he mencionado largamente de Dieudonné. Cuando señala que junto a la consideración conceptual pura de lo que sea un número real, por ejemplo, aparece ese número real como proceso calculable, lo que llamar computable. Y no es simplemente volver a la concepción de que el Análisis posee un contenido numérico que en el Hacer Global había perdido. Un número real como cortadura, como clase de equivalencia no permite, en el fondo, computar nada. Solo cuando se admite que el número real es un “proceso de cálculo aproximado” puede manejarse para la computación.

Si Dieudonné escribe esas palabras en 1968, Erret Bishop ha publicado su *Foundations of Constructive Analysis* en 1967 elaborando un Análisis en el que se manejan, junto a los reales, los infinitésimos. En 1975 Bishop va a denunciar la ausencia de contenido numérico que se tiene en el Hacer Global, ausencia por la cual el Hacer matemático se encuentra en “crisis”. Bishop retoma la línea constructivista intuicionista de Brouwer y, años antes, de Borel quien había establecido, ya, la propia definición de número real computable y precisamente en términos de aproximación. Erret Bishop construye desde 1967, y en paralelo a la escuela rusa de Markov, lo que cabría calificar de Análisis constructivista.

Marginada la corriente constructivista durante varios años, la aparición del ordenador, del intruso en el ecosistema matemático, conduce a replantear ese mismo ecosistema y obliga a desarrollar un Análisis computacional, un Álgebra computacional, un nuevo enfoque en cuanto a la posible resolución de las ecuaciones diferenciales, un manejo de series de Fourier al estilo de diferencias finitas... Y cabe considerar la aparición de un nuevo tipo de Hacer, calificable de Hacer computacional.

Si en lo Figural se partía del objeto –el problema, la ecuación...– para predicar de él unos atributos, o para resolver la ecuación dada; si en lo Global se partía del sistema para caracterizar existencialmente los elementos del mismo y establecer relaciones entre diferentes objetos de segundo nivel, tanto en uno como otro Hacer hay un elemento, en el fondo, denotativo. Cabe eliminar este enfoque y observar que para un astrónomo, por ejemplo, un número real como π no es más que un símbolo que posibilita un cómputo; es, realmente, lo que señalaron Borel, Brouwer, Dieudonné, Bishop: un proceso de cálculo. Pero, con ello, se pierde el carácter denotativo que tenía en los Haceres anteriores, y se pasa a un carácter operacional. Se produce el mismo paso que he tratado de señalar en el caso de la Lógica donde hasta el lenguaje se hace diferente y se manejan funciones recursivas, máquinas-Turing....

De aquí que pueda considerarse que el Hacer computacional se constituye a partir del establecimiento de reglas operatorias con carácter básicamente numérico, orientadas a la obtención de valores con una aproximación dada. El ordenador posibilita, ciertamente, convertir esas reglas en algoritmos de computación. En lugar de fórmulas, algoritmos; en lugar de teoremas, procesos computacionales, y se puede pasar a manejar demostraciones ayudadas por ordenador, por ejemplo.

7

Unas precisiones, para finalizar.

Los tres Haceres mencionados condicionan el estilo, es decir la ontología, metodología y epistemología de los mismos. Pero también los enfoques desde los cuales realizar una mirada atrás sobre las obras de autores del pasado así como del contenido de las propias disciplinas. Así, lo he apuntado en la Lógica: de un Ars artium, a juicios y leyes sobre el ser, a sistema de reglas y, de aquí, a algoritmos.

Los reduccionismos que provocaron las reformas han llevado a esas reiteradas quejas de que Juancito no sabe sumar o de que un estudiante de segundo o tercero de Facultad no sabe hacer un cambio de variable, una integración por partes. Pero eso es consecuencia de los reduccionismos que se impusieron dogmáticamente, del movimiento pendular que toda reforma supone en el momento en el que se impone y que sólo el tiempo consigue recuperar un cierto equilibrio. He mencionado a Dieudonné para indicar cómo uno de los más fervientes defensores de las reformas y limpiezas educativas reconocía la existencia de un Cálculo como el Infinitesimal, manifestación de un Hacer como el Figural y que debía ser enseñado antes que pasar al, para él, auténtico Análisis. No sólo reconocimiento, sino necesidad de que el mismo se impartiera y se dominara por parte del estudiante. Ciertamente con una salvedad, enseñanza para los físicos y los ingenieros, ya que para Dieudonné la formación que debe impartir la Universidad se centra en formar investigadores.

Y esto último es algo que cabe no asumir: no todos los universitarios han de ser investigadores, sino también profesores o ir a terrenos de aplicación. Se tergiversa la llamada "misión de la Universidad" y, con ello, las materias y el enfoque con las cuales han de impartirse las mismas. Compatibilizar los distintos Haceres no es fácil y más si no se reconocen, pero es una de las labores, una exigencia que conviene materializar y ello en nombre de una auténtica formación de nuestros universitarios, de la cultura y pensamiento matemático en general.

Javier de Lorenzo
Departamento de Filosofía
Universidad de Valladolid
Correo electrónico: jalor@fyl.uva.es