

## Demostración de Hamilton-Perelman de las Conjeturas de Poincaré y Thurston

por

Esther Cabezas Rivas y Vicente Miquel Molina

*Dedicado a nuestro maestro Antonio Martínez Naveira  
como felicitación por su 65 cumpleaños*

### 1 INTRODUCCIÓN

Un amigo de los autores se conecta cada día, rutinariamente, a la sección Geometría Diferencial de `arXiv:math`. Pero el 11 de noviembre de 2002 pasó algo extraordinario que le hizo saltar de la silla y exclamar: “¡¡Lo consiguió!!”.

El motivo de tanto alboroto era el artículo “*The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*” firmado por un conocido suyo: Grisha Perelman. Sólo gracias a las conversaciones mantenidas con su autor nueve años atrás pudo sospechar que ese título escondía la demostración de la Conjetura de Geometrización, uno de los grandes problemas de la Topología del siglo XX.

¿Qué dice dicha conjetura? ¿Qué pasos, ideas y técnicas emplea Perelman? ¿Por qué un artículo que indica cómo resolver un problema topológico aparece en el apartado de Geometría Diferencial de `arxiv:math` y no en alguno de los tres que llevan la palabra topología?

Aquí<sup>1</sup> nos proponemos responder a estas preguntas, pensando en un público matemático no especialista. Dedicaremos la sección 2 a la tercera pregunta, la 3 a la primera y el resto a la segunda.

### 2 ¿POR QUÉ ENFRENTARSE A UN PROBLEMA TOPOLÓGICO CON “ARMAS GEOMÉTRICAS”?

Para responder a esta pregunta necesitamos dos minicursos previos (sobre variedades y sobre Geometría Riemanniana) que nos ayudarán, además, a fijar la terminología y notación usadas en las secciones siguientes.

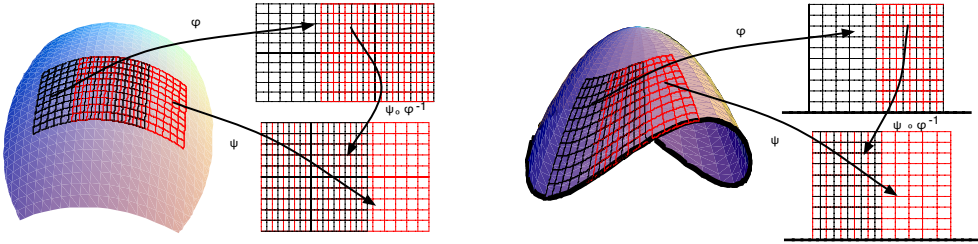
---

<sup>1</sup>El presente artículo pretende ser una continuación del excelente *survey* de Vicente Muñoz [25] con algunas intersecciones no vacías para hacer de este trabajo algo autocontenido y comprensible. El lector puede acudir a [25] para el concepto de grupo fundamental y relacionados, caso de que lo desconozca.

## 2.1 UNAS PINCELADAS DE VARIEDADES DIFERENCIABLES

El espacio modelo para las variedades es  $\mathbb{R}^n$ , y para las variedades con borde es  $\mathbb{H}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}$ . Una variedad topológica (con borde) es un espacio topológico localmente igual que  $\mathbb{R}^n$  (que  $\mathbb{H}^n$ ).

Con más precisión, una **variedad topológica** de dimensión  $n$  es un espacio topológico  $M$  tal que para todo punto  $p \in M$  existe un abierto  $U$  de  $M$  conteniendo a  $p$  y un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . El par  $(U, \varphi)$  se llama sistema de coordenadas de  $M$  en  $p$  porque asigna a cada punto  $q \in U$  sus coordenadas  $(x^1(q), \dots, x^n(q)) = \varphi(q)$ . Los dominios  $U$  y  $V$  de dos sistemas de coordenadas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  pueden tener intersección no vacía y, entonces, el cambio de coordenadas  $\mathbb{R}^n \supset \psi(U \cap V) \xrightarrow{\varphi \circ \psi^{-1}} \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo. Cuando todos esos homeomorfismos son difeomorfismos (aplicaciones diferenciables con inversa diferenciable) se dice que  $M$  es una **variedad diferenciable**.



El concepto de **variedad con borde**, tanto topológica como diferenciable, se define exactamente igual que el de variedad, pero cambiando  $\mathbb{R}^n$  por  $\mathbb{H}^n$ . En estas variedades se distinguen los puntos del borde  $\partial M$  de  $M$ , que son aquéllos que, en un sistema de coordenadas, su última coordenada  $x^n$  se anula, y los del interior  $int(M)$ , que son todos los demás.  $int(M)$  es una variedad en el sentido de la primera definición que hemos dado. Si  $\partial M = \emptyset$ , entonces  $M = int(M)$ .

Intuitivamente, el **espacio tangente**  $T_p M$  a una variedad  $M$  en un punto  $p$  es el conjunto de vectores tangentes a todas las curvas  $C^\infty$  de  $M$  que pasan por  $p$ . Cada  $T_p M$  tiene estructura de espacio vectorial  $n$ -dimensional y, por tanto, es isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Además, un sistema de coordenadas  $(U, \varphi)$  de  $M$  define una base canónica  $\{\partial_i(q)\}_{i=1}^n$  de  $T_q M$  para cada  $q \in M$ .

Por simplicidad y salvo cuando se especifica lo contrario, todos los resultados están enunciados para **variedades orientadas** (aquéllas que se pueden recubrir por dominios de sistemas de coordenadas tales que las matrices jacobianas de los cambios de coordenadas siempre tienen determinante positivo) y **cerradas** (i.e., compactas -como espacios topológicos- y sin borde).

## 2.2 MINICURSO DE VARIEDADES RIEMANNIANAS

Una **métrica riemanniana**  $g$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es la asignación, a cada espacio tangente  $T_pM$ , de un producto escalar  $g_p$  (es decir, de una forma bilineal simétrica y definida positiva  $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ ). Se llama **variedad riemanniana**  $(M, g)$  a una variedad diferenciable  $M$  sobre la que se ha definido una métrica riemanniana  $g$ .

Una métrica Riemanniana  $g$  permite definir sobre una variedad la norma de cada vector tangente y, con la ayuda de ésta, la **longitud de una curva** diferenciable  $L_g$  se define como la integral a lo largo de la curva de la norma del vector tangente a la curva en cada punto. Además, dados dos puntos de la variedad, la **distancia** entre ellos  $d_g(\cdot, \cdot)$  viene dada por el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen esos dos puntos.

Se prueba que  $(M, d_g)$  es un espacio métrico y que *la topología original de  $M$  como variedad coincide con la inducida por  $d_g$* . Esto dará sentido a hablar de variedades Riemannianas completas (como espacios métricos). En éstas se verifica que existe *una curva uniendo dos puntos cualesquiera cuya longitud es igual a la distancia entre esos puntos. Las curvas verificando esa propiedad se llaman geodésicas*.

En la base  $\{\partial_i\}_{i=1}^n$  definida por un sistema de coordenadas  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  de  $M$ , una métrica riemanniana  $g$  sobre  $M$  tiene unas coordenadas  $g_{ij}(q) = g_q(\partial_i, \partial_j)$ , que son funciones diferenciables sobre el abierto  $U$ . Por la simetría de  $g$ ,  $g_{ij} = g_{ji}$ .

Cada punto  $p$  de una variedad riemanniana posee un entorno en el que están definidas unas **coordenadas** llamadas **normales en  $p$** , en las cuales las geodésicas que pasan por  $p$  tienen las mismas coordenadas que una recta en  $\mathbb{R}^n$  pasando por el origen y, además,  $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ .

*En un sistema de coordenadas normales en  $p$ , la métrica  $g$  admite el siguiente desarrollo de Taylor alrededor de  $p$  (cf. [34], p.40-41):*

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{iajb}(p)x^a x^b + O(\|x\|^3), \quad (1)$$

donde  $R(p)$  es una aplicación 4-lineal para todo  $p \in M$  que verifica las propiedades de simetría  $R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{klij}$  y se conoce como **curvatura Riemanniana** de la variedad. Por el anterior desarrollo, en una variedad Riemanniana la diferencia de primer orden con el espacio euclídeo es 0 y la de segundo orden viene dada por  $R$ .

Cuando la dimensión de  $M$  es 2, a causa de sus simetrías,  $R$  sólo tiene una componente relevante no nula,  $R_{1212}$ , que se llama **curvatura  $K$  de la superficie  $M$** . A partir de la curvatura Riemanniana se definen:

- La **curvatura seccional** de una variedad  $(M, g)$  en un punto  $p$  es una aplicación

$$\text{Sec} : \{2\text{-planos contenidos en } T_pM\} \rightarrow \mathbb{R}$$

que a cada plano  $\Pi \subset T_pM$  le asigna la curvatura  $K$  en  $p$  de la superficie formada por todas las geodésicas de  $(M, g)$  tangentes a  $\Pi$  en  $p$ .

La curvatura seccional y la curvatura riemanniana están intimamente relacionadas: *Sec está determinada por  $R$  y  $R$  determina  $Sec$ .*

- La **curvatura de Ricci**  $Ric$  de una variedad riemanniana  $(M, g)$  es la asignación, a cada espacio tangente  $T_p M$  de la forma bilineal simétrica  $Ric_p$  definida, en cualquier sistema de coordenadas, por  $Ric_{ij} = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} R_{ikjl}$ , donde  $(g^{kl})_{1 \leq k,l \leq n}$  representa la matriz inversa de  $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

La presencia de una métrica sobre una variedad permite definir una densidad de volumen sobre cada espacio tangente (exigiendo que el volumen del cubo de lado uno sea 1) y, por integración, el volumen de un dominio de la variedad. También aquí, cuando se toman coordenadas normales, la diferencia de primer orden de esta densidad con respecto a la euclídea es 0 y la de segundo orden viene determinada por la curvatura de Ricci, lo que da la mejor *interpretación geométrica* de  $Ric$ .

Dos **variedades riemannianas**  $(M, g)$  y  $(N, h)$  se dice que son **isométricas** si existe una aplicación  $f : M \rightarrow N$ , llamada **isometría**, que conserva las distancias. Esto es equivalente a que

(II) *para todo  $p \in M$  existan sistemas de coordenadas  $(U, \varphi)$  en  $p$  y  $(V, \psi)$  en  $f(p)$  tales que  $f$  restringido a  $U$  es un difeomorfismo sobre  $V$  y  $h_{ij}(f(p)) = g_{ij}(p)$*

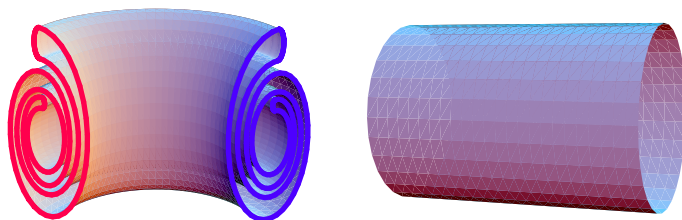
Dos variedades riemannianas isométricas se consideran como iguales a efectos de Geometría Riemanniana. Por lo tanto, es natural decir que dos variedades riemannianas isométricas se encuentran a distancia 0. De aquí y de la propiedad (II) resulta también natural decir que **dos variedades riemannianas están  $\varepsilon$ -próximas** si se pueden recubrir por sistemas de coordenadas que satisfacen la propiedad (II) salvo que, en lugar de verificar la igualdad  $g_{ij} = h_{ij}$ , verifican que las diferencias  $g_{ij} - h_{ij}$  y las de sus derivadas son menores que  $\varepsilon$ .

Una isometría de una variedad riemanniana  $(M, g)$  es una isometría de ella en sí misma. Las variedades con mayor número de isometrías son las de curvatura seccional constante. De entre ellas, sólo son simplemente conexas el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  ( $Sec = 0$ ), la esfera  $S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = r^2\}$  ( $Sec = 1/r^2 > 0$ ) y el espacio hiperbólico  $H^n$  ( $Sec < 0$ ). Los demás espacios de curvatura seccional constante son cocientes  $\widetilde{M}/\Gamma$ , donde  $\widetilde{M}$  es  $S^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  o  $H^n$  y  $\Gamma$  es un grupo discreto de isometrías de  $\widetilde{M}$  que es isomorfo a  $\pi_1(\widetilde{M}/\Gamma)$ . Por ejemplo, el espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^n$  de curvatura seccional constante es  $S^n/\{\pm Id\}$ .

Las variedades riemannianas de curvatura seccional constante son un caso especial de una familia más amplia: los llamados espacios localmente homogéneos. Éstos se corresponden con lo que intuitivamente expresa su nombre: espacios que tienen el mismo aspecto vistos desde cualquiera de sus puntos. Con más precisión, *una variedad riemanniana  $(M, g)$  se dice que es un **espacio localmente homogéneo** si dados dos puntos cualesquiera  $p, q \in M$ , existen un abierto  $U \ni p$  y una isometría de  $U$  en su imagen que lleva  $p$  en  $q$ .*

### 2.3 GEOMETRÍA RIEMANNIANA Y TOPOLOGÍA

La famosa frase “un topólogo es una persona que no distingue entre un donuts y una taza de café” recuerda que dos variedades son homeomorfas (topológicamente equivalentes) si se puede deformar una en otra sin hacer ningún corte. En consecuencia, un espacio topológico se nos puede presentar tan deformado que resulte difícil reconocerlo; por ejemplo, los dos dibujos siguientes son cilindros de dimensión 2



pero, evidentemente, es más fácil identificar ese espacio topológico en el dibujo de la derecha.

La Geometría Riemanniana puede ayudar a reconocer en qué espacio topológico nos encontramos gracias a dos pilares básicos:

- (1) Toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana.
- (2) Se conoce la topología de muchas variedades riemannianas, especialmente de espacios homogéneos.

Para averiguar la topología de una variedad, podemos proceder como sigue: aplicando (1), empezamos con una métrica arbitraria sobre  $M$  y, con el paso del tiempo, deformamos la métrica hasta que aparezca una conocida (usualmente la de algún espacio homogéneo). La ventaja de deformar la métrica riemanniana en lugar de la variedad radica en que, al ser la métrica localmente una familia de funciones  $g_{ij}$ , se puede dar una especie de “regla” o “algoritmo” para hacer la deformación. El flujo de Ricci (del que hablaremos en la sección 4 y que aparecía en el título del citado *preprint* de Perelman) es uno de esos “algoritmos”.

Vamos a explicar ahora cuál es el problema que Perelman pretendía resolver.

### 3 EL PROBLEMA DE LA CLASIFICACIÓN DE LAS 3-VARIEDADES

#### 3.1 UN ANTECEDENTE “ILUSTRE”: LA PREGUNTA DE POINCARÉ

El problema precursor para la clasificación de las 3-variedades fue planteado por *Henri Poincaré* (1854-1912) con el fin de caracterizar la 3-variedad más sencilla: la esfera  $S^3$ .

En 1904, Poincaré observa que una propiedad característica de la 2-esfera es que se trata de una variedad simplemente conexa, o sea, toda curva cerrada y sin autointersecciones contenida en la variedad se puede deformar a un punto de manera continua. Esto le lleva a plantearse si la misma cuestión es cierta en dimensión 3, como se manifiesta casi al final de [30] donde formula una pregunta que, usando un lenguaje actual, quedaría

*¿Es toda 3-variedad cerrada y simplemente conexa homeomorfa a la esfera  $S^3$ ?*

La afirmación que resulta de eliminar los interrogantes se conoce como **Conjetura de Poincaré**. Los esfuerzos por demostrarla han abierto el camino hacia el proyecto más ambicioso de clasificar todas las 3-variedades, cosa que ha sido un objetivo largamente perseguido a lo largo del siglo XX. En el proceso de clasificación, distinguiremos tres etapas (que dan nombre a los tres siguientes apartados).

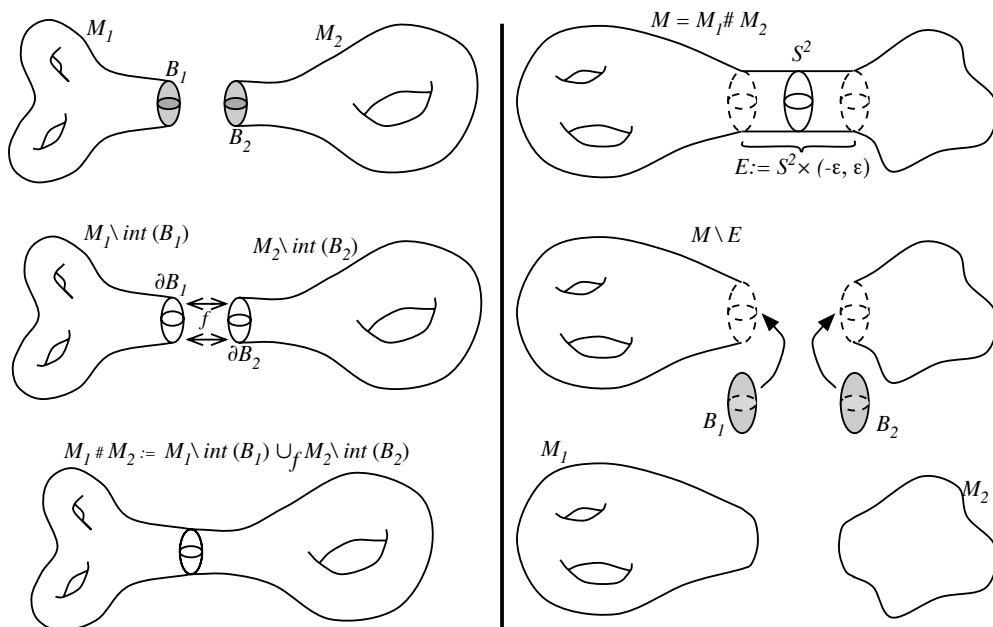
#### 3.2 DESCOMPOSICIÓN EN PRIMOS (O POR ESFERAS)

Empezamos introduciendo la **suma conexa** de dos 3-variedades  $M_1$  y  $M_2$  que tienen una 3-bola cerrada embebida (i.e., sin autointersecciones)  $B_i \subset M_i$  para  $i = 1, 2$ . Se trata de una operación binaria que se denota por  $M_1 \sharp M_2$  y se realiza en dos pasos:

- (1) Eliminar de cada  $M_i$  el interior de la 3-bola  $B_i$ . Nótese que  $M_i \setminus \text{int}(B_i)$  es una 3-variedad con borde la 2-esfera  $\partial B_i$  ( $i = 1, 2$ ).
- (2) Identificar las 2-esferas borde mediante un homeomorfismo  $f : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$ .

Si exigimos que  $f$  cambie las orientaciones inducidas en el borde, entonces  $\sharp$  es una operación bien definida, conmutativa y asociativa (cf. [17] p. 24), cuyo elemento neutro es la esfera  $S^3$  (o sea,  $M \sharp S^3$  es siempre homeomorfa a  $M$ ). Además,  $M_1 \sharp M_2$  será una 3-variedad orientada.

Recíprocamente, si una 3-variedad  $M = M_1 \sharp M_2$ , entonces  $M$  contiene una esfera  $S^2$  embebida de tal forma que  $M_1$  y  $M_2$  se obtienen cortando  $M$  a lo largo de  $S^2$  (esto es, eliminando de  $M$  el conjunto  $S^2 \times (-\epsilon, \epsilon)$  -con  $\epsilon > 0$  pequeño- tras lo cual resultan dos variedades con borde  $S^2$ ) y rellenando las 2-esferas borde con 3-bolas. Se dice que  $M_1$  y  $M_2$  surgen tras realizar un **proceso de cirugía** a la variedad  $M$ .



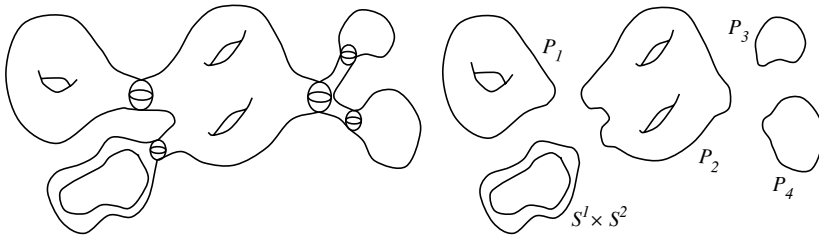
Haciendo una analogía con la multiplicación de números enteros, una **3-variedad**  $M$  se denomina **prima** si sólo se puede descomponer como suma conexa de manera trivial, i.e., cualquier descomposición de  $M$  como  $M_1 \# M_2$  implica que  $M_1$  ó  $M_2$  son homeomorfas a  $S^3$ .

Por otro lado, se dice que una **3-variedad**  $M$  es **irreducible** si toda 2-esfera embebida  $S^2 \subset M$  acota una 3-bola  $B^3 \subset M$ . Claramente, una 3-variedad irreducible es prima. El recíproco es casi cierto, pues  $S^1 \times S^2$  es la única 3-variedad que es prima pero no irreducible (cf.[16] p. 4-5).

• **Descomposición en primos o por esferas** (cf. [21]): toda 3-variedad  $M$  se puede expresar como suma conexa finita de 3-variedades primas de la forma:

$$M \cong (P_1 \# \dots \# P_s) \# (S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2),$$

donde los factores  $P_i$  son irreducibles. Además, la colección  $\{P_i\}_{i=1}^s$  es única (cf. [22]) salvo difeomorfismo, orden de los factores o inserción de  $S^3$ .

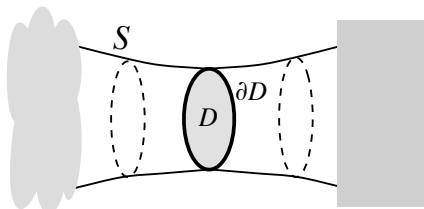


En definitiva, esta descomposición reduce el problema a la clasificación de las 3-variedades irreducibles.

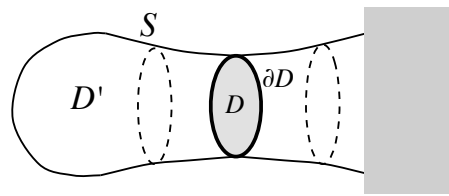
### 3.3 DESCOMPOSICIÓN TÓRICA

Empezaremos dando el vocabulario básico para entender la descomposición tórica. Con este fin, consideramos  $N$  una 3-variedad compacta (posiblemente con borde).

- Se dice que una **superficie**  $S \subset N$  compacta, orientada y tal que  $S \cap \partial N = \partial S$  es **incompresible** si para todo disco  $D$  embebido en  $N$  con  $D \cap S = \partial D$ , la curva  $\partial D$  también acota un disco contenido en  $S$  (o sea, dicha curva es contráctil en  $S$ ).



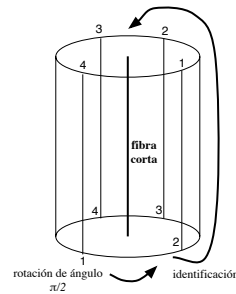
$S$  es incompresible si para cada  $D$  que divide a la superficie en dos porciones...



...una de esas porciones es un disco  $D'$

- $N$  es **toro-irreducible** si todo toro incompresible embebido en  $N$  se puede deformar a un toro en  $\partial N$ . Si  $N$  es cerrada, toro-irreducible significa que no contiene toros incompresibles.

- Se dice que  $N$  es una **fibración Seifert** si se expresa como una unión disjunta de esferas  $S^1$  (las fibras) cada una de las cuales tiene un entorno, formado por una unión de fibras, que es homeomorfo (a través de un homeomorfismo que preserva las fibras) a un  $(p, q)$ -toro sólido fibrado estándar



$$T_{(p,q)} := \cup_{x \in D^2} [0, 1] \times \{x\} / (x, 0) \sim (\rho(x), 1),$$

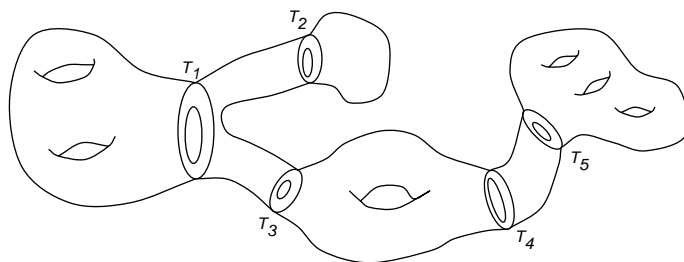


donde  $D^2$  es el disco unidad y  $\rho$  una rotación de  $D^2$  de ángulo  $2\pi p/q$ , para algún par de enteros  $p$  y  $q$  primos entre sí ( $q \geq 1$ ). Notemos que la identificación convierte al segmento  $\{0\} \times I$  en una esfera  $S^1$  (fibra corta); pero, si  $x \neq 0$ , hay que recorrer  $q$  intervalos de la forma  $\{x\} \times I$  hasta obtener en el cociente una  $S^1$ . Además, hay un número finito de fibras cortas y todas ellas están en el interior de  $N$ .

Sea ahora  $M$  una 3-variedad irreducible. La **decomposición tórica** (cf. [18], [19]) dice que *existe una colección finita  $\mathcal{T}$  de toros incompresibles disjuntos tales que*

- cada una de las componentes de  $M \setminus \mathcal{T}$  (que serán 3-variedades compactas con borde tórico) es toro-irreducible o fibración de Seifert;
- $\mathcal{T}$  es minimal (en cardinalidad) respecto a la propiedad anterior.

Obsérvese que la colección  $\mathcal{T}$  es vacía cuando la propia variedad  $M$  es toro-irreducible o fibración Seifert.



### 3.4 LA CONJETURA DE GEOMETRIZACIÓN DE THURSTON

Una **variedad** (posiblemente con borde)  $M$  se denomina **geométrica** si  $\text{int}(M)$  admite una métrica Riemanniana  $g$  tal que  $(\text{int}(M), g)$  es un espacio localmente homogéneo.

La **Conjetura de Geometrización**, enunciada por William P. Thurston (cf. [35]), dice que cualquier 3-variedad es geométrica o se puede descomponer (por cirugía a lo largo de esferas y toros incompresibles) en variedades geométricas.

Existen sólo 8 espacios localmente homogéneos simplemente conexos (y que admiten cociente compacto) de dimensión 3. Entre ellos la esfera, el hiperbólico y el espacio euclídeo. Todos los espacios localmente homogéneos compactos son cociente de alguno de estos 8 espacios por un subgrupo discreto de isometrías (cf. [31] y [35]). Todos estos espacios tienen una topología bien conocida (excepto algunos cocientes del hiperbólico que todavía son objeto de investigación). Por lo tanto, si se prueba la Conjetura de Geometrización, la clasificación de las 3-variedades está esencialmente acabada.

Recapitulando, la Conjetura afirma que las 3-variedades obtenidas en la descomposición tórica son geométricas y, por el apartado anterior, sabemos que dichas 3-variedades son toro-irreducibles o fibraciones Seifert. Como es un

hecho conocido (cf. [31]) que estas últimas son geométricas, sólo queda analizar si las 3-variedades toro-irreducibles son geométricas.

Gracias a los avances topológicos realizados en la prueba de la Conjetura (ver [2] para una exposición detallada), desde 1994 únicamente se consideraban abiertos los dos casos particulares que enunciamos a continuación.

• **Conjetura de Hiperbolización.** Si  $M$  es una 3-variedad irreducible tal que  $\pi_1(M)$  es infinito y no contiene ningún subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , entonces  $M$  es del tipo  $H^3/\Gamma$ .

• **Conjetura de Eliptización (incluye la de Poincaré).** Toda 3-variedad irreducible de grupo fundamental finito es un cociente  $S^3/\Gamma$ .

## 4 EL FLUJO DE RICCI

### 4.1 LA ECUACIÓN

En 1982 (cf. [11]), Richard Hamilton introdujo el concepto de flujo de Ricci para variedades de dimensión arbitraria. Como dijimos en 2.3, se trata de un método para hacer evolucionar una métrica Riemanniana. Hamilton buscaba averiguar si variedades que admitían métricas de cierta complicación podían admitir también métricas más “bonitas” (de curvatura constante, homogéneas, ...). El resultado obtenido fue el Teorema 3, el cual, como veremos, motivó que Hamilton diseñara su programa para demostrar la Conjetura de Geometrización usando el flujo de Ricci.

El **flujo de Ricci** es una familia uniparamétrica de métricas Riemannianas solución de

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\text{Ric}_{g_t}, \quad (2)$$

con la condición inicial  $g_0 = g$ . De (2), que se conoce como ecuación del flujo de Ricci (o, simplemente, flujo de Ricci), destacaremos que es invariante por cambios de escala (o sea, si  $g_t$  es solución de (2), también lo es  $\tilde{g}_t = c^2 g_{c^{-2}t}$ ).

Para entender que usar la ecuación (2) es natural para el objetivo que inicialmente perseguía Hamilton, conviene retrotraerse a una de las ecuaciones de evolución más antigua, la **ecuación del calor** en  $\mathbb{R}^3$

$$\Delta T = -\frac{\partial T}{\partial t}; \quad T(0) = T_0; \quad \text{siendo } \Delta T := -\frac{\partial T}{\partial x^1} - \frac{\partial T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial x^3}, \quad (3)$$

cuya solución  $T(x, y, z, t)$  da la temperatura de un punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  en un tiempo  $t$  cuando la temperatura inicial es  $T_0(x, y, z)$ . Esta solución es tal que la temperatura tiende a una distribución lo más homogénea posible a medida que el tiempo avanza. Cuando  $t \rightarrow \infty$ , se verifica  $\Delta T = 0$  (i.e.,  $T$  es una función armónica) y la distribución de temperatura resultante es uniforme.

Esta propiedad de la ecuación del calor inspiró a Eells y Sampson (1964, cf. [10]), quienes usaron un tipo de ecuación semejante, pero no lineal, para

demostrar que toda aplicación entre variedades riemannianas (cumpliendo ciertas acotaciones en su curvatura) evoluciona a una aplicación de un tipo muy especial<sup>2</sup>. Hamilton trabajó en este mismo tema. No es de extrañar, pues, que pensara en hacer con las métricas algo similar, esto es, buscar una ecuación de evolución de la métrica que tuviera alguna semejanza con la del calor y esperar que la solución tienda hacia métricas más bonitas. Podemos incluso esperar que, igual que la solución de la ecuación del calor tiende a distribuirse uniformemente sobre el espacio, la métrica tienda a distribuirse también de modo semejante sobre todos los puntos de la variedad, como ocurre en los espacios localmente homogéneos.

Antes de pensar en que la ecuación que buscamos sea del tipo (3) hay que plantearse una cuestión más elemental: ¿qué ecuaciones son posibles?

Cuando buscamos una ecuación para la derivada parcial temporal de una métrica Riemanniana  $g_t$  sobre una variedad  $M$ , esto es, una ecuación “tipo flujo” con la forma general

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \square, \quad (4)$$

hay que exigir condiciones geométricas con el fin de que (4) tenga sentido:

i) Para que la resolución sea posible,  $\square$  deberá estar definido únicamente en función de  $g_t$  y sus derivadas respecto de las coordenadas de  $M$  (como máximo hasta orden 2).

ii)  $\square \equiv \square(g_t)$  será una forma bilineal simétrica (por serlo la métrica y porque derivar respecto del tiempo no afecta a las coordenadas de la variedad).

iii) Por último, es deseable que (4) sea invariante por cambios de coordenadas.

Con las tres propiedades anteriores<sup>3</sup>, la única posibilidad es que  $\square(g_t)$  sea una combinación lineal de la propia métrica  $g_t$  y de la curvatura de Ricci asociada a  $g_t$ . Así,

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \alpha(t)\text{Ric}_{g_t} + \lambda(t)g_t.$$

Tratando de hacer los cálculos más sencillos, tomaremos  $\lambda \equiv 0$  y  $\alpha$  constante:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \alpha \text{Ric}_{g_t}. \quad (5)$$

Para averiguar el signo de  $\alpha$  que conviene tomar en (5), vamos usar que buscamos una ecuación del tipo (3). Recordando el desarrollo de Taylor de las

---

<sup>2</sup>llamada armónica también por ser una generalización de la función armónica hacia la que evoluciona la ecuación del calor

<sup>3</sup>Las condiciones i) y iii) anteriores se suelen expresar en Geometría Riemanniana diciendo que  $\square$  ha de ser un tensor natural de segundo orden.

componentes de la métrica en coordenadas normales (1) y la definición de la curvatura de Ricci,

$$(\Delta g_{ij})(p) = - \sum_{a=1}^n \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^{a2}}(p) = - \sum_{a,b=1}^n (g^{ab} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^a \partial x^b})(p) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{3} \text{Ric}_{ij}(p) + O(\|x\|).$$

Luego (5) se puede aproximar por

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} \approx 3\alpha \Delta g_t. \quad (6)$$

Por lo tanto, sólo si  $\alpha < 0$  el flujo de Ricci se puede aproximar linealmente por una ecuación como la del calor (3). Finalmente, el valor específico de  $\alpha$  es una cuestión arbitraria; en concreto, por motivos de cálculo, Hamilton tomó  $\alpha = -2$ .

#### 4.2 PRIMERA APROXIMACIÓN A LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES

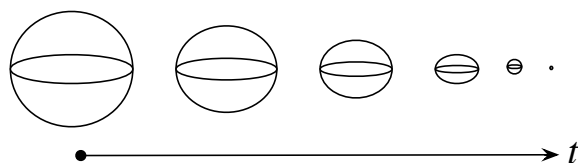
Para que el estudio práctico del flujo de Ricci sea posible, lo primero que se ha de plantear es si la ecuación (2) tiene solución, al menos para pequeños intervalos de tiempo. Esto lo asegura el resultado que enunciamos a continuación, cuya prueba da Hamilton en 1982 (cf. [11]) y simplifica DeTurck (cf. [9]) un año más tarde usando un “truco” (cf. [7], p.78-90) que tendrá una notable influencia en el posterior trabajo de Perelman (cf. [26], §1).

**TEOREMA 1** *Dada cualquier variedad Riemanniana  $(M, g)$  de dimensión arbitraria, existe  $\epsilon$  y una única solución diferenciable  $g_t$  del flujo de Ricci, con  $t \in [0, \epsilon)$ , tal que  $g_0 = g$ .*

#### 4.3 SOLUCIONES QUE DESAPARECEN EN TIEMPO FINITO

La analogía del flujo de Ricci con la ecuación del calor no es tan perfecta como decíamos en el apartado 4.1, sino que ya surgen dificultades al observar los ejemplos más sencillos de soluciones del flujo de Ricci.

**EJEMPLO 2 (Flujo de Ricci en la esfera)** *Si hacemos evolucionar la métrica estándar de una esfera siguiendo el flujo de Ricci, la variedad se contrae conforme el tiempo avanza hasta que, en un tiempo finito, colapsa a un punto (esto es, la métrica tiende a cero y la curvatura se vuelve no acotada en todo punto).*



En el ejemplo, la esfera acaba convirtiéndose en un punto (el cual tiene volumen cero); luego una posible estrategia para evitar este comportamiento sería exigir que el volumen de la solución se mantenga constante con el tiempo. La modificación de (2) para que se cumpla esta condición lleva a la ecuación del **flujo de Ricci normalizado**:

$$\frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} = -2\text{Ric}_{\tilde{g}_t} + \frac{2}{n} r \tilde{g}_t, \quad (7)$$

donde  $r \equiv r(t)$  es una función que depende de una integral de la curvatura.

El siguiente resultado (cf. [11]) muestra que el procedimiento recién descrito funciona.

**TEOREMA 3** *Si  $(M, g)$  es una 3-variedad Riemanniana con  $\text{Ric}_g > 0$ , entonces la solución de (2) se contrae a un punto en un tiempo finito; pero existe una única solución  $g_t$  de (7) definida para todo  $t \geq 0$  y tal que  $g_0 = g$ . Además,  $g_t$  converge, cuando  $t \rightarrow \infty$ , a una métrica de curvatura seccional constante y positiva.*

Las soluciones de (2) y (7) son equivalentes en el sentido de que una se obtiene a partir de la otra multiplicando por un factor de reescalamiento adecuado y haciendo una reparametrización temporal. A causa de esta propiedad, el flujo de Ricci normalizado es una herramienta que ha caído en desuso; pues se consigue el mismo efecto simplemente expandiendo las distancias y el tiempo en una solución ordinaria de (2)<sup>4</sup>.

#### 4.4 ¿HASTA CUÁNDO SE PUEDE PROLONGAR LA SOLUCIÓN DE (2)?

Resulta natural formularse esta pregunta, pues el ejemplo 2 muestra que el flujo de Ricci no existe en general para todo el intervalo de tiempo  $[0, \infty)$ . A grandes rasgos, diremos que el flujo se vuelve singular en el instante  $T$  si no se puede extender más allá de  $T$ . Hamilton probó (cf. [12], §8) que si la solución de (2) existe sólo en un intervalo de tiempo finito, entonces la curvatura no está acotada. Con más precisión:

*si un flujo de Ricci  $g_t$  existe para  $t \in [0, T)$ , pero no se puede extender más allá de  $T$ , entonces*

$$T = \infty \quad \text{o bien} \quad \sup_{M \times [0, T)} |\text{Sec}_{g_t}| = \infty.$$

Este resultado propicia la siguiente *clasificación para las soluciones del flujo de Ricci*:

- **no singulares:**  $T = \infty$  y  $\sup_{M \times [0, T)} |\text{Sec}_{g_t}|(x) < \infty$ ,

<sup>4</sup>En el ejemplo 2, esto haría que en el instante final se observara una pequeña esfera en lugar de un punto.

• **singulares:**  $\sup_{M \times [0, T]} |\text{Sec}_{g_t}|(x) = \infty$ . Describimos su comportamiento diciendo que el flujo encuentra una singularidad <sup>5</sup> en  $T$  (**tiempo singular**).

Según esto, para que el flujo produzca una singularidad hay dos posibilidades: (a) que en el instante singular la curvatura se haga infinito en todos los puntos de la variedad (como el caso de la esfera) y (b) que la curvatura sea no acotada sólo en una región concreta de la variedad. Vimos que la posibilidad (a) es evitable usando el flujo de Ricci normalizado, pero veremos en el apartado siguiente que (b) también se da, y ésta es la que produce los mayores problemas en el estudio del flujo de Ricci.

4.5 FORMACIÓN DE SINGULARIDADES LOCALES

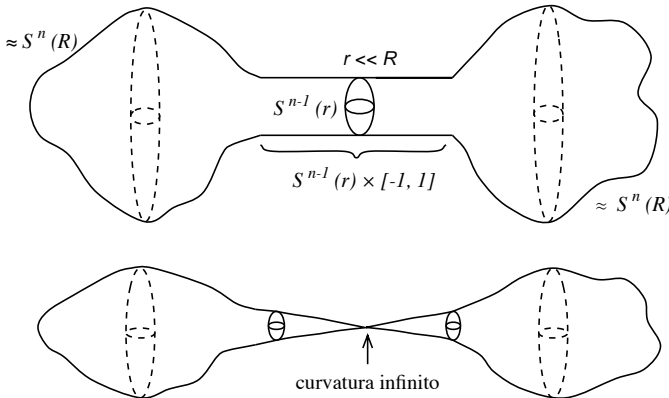
Comenzamos dando más detalles sobre las singularidades de tipo (a) y (b) recién descritas. Se dice que un flujo de Ricci  $g_t$  forma una **singularidad local** en el instante  $T$  si existe un subconjunto compacto  $\mathcal{K} \subset M$  tal que

$$\sup_{\mathcal{K} \times [0, T]} |\text{Sec}_{g_t}|(x) = \infty, \quad \text{pero} \quad \sup_{(M \setminus \mathcal{K}) \times [0, T]} |\text{Sec}_{g_t}|(x) < \infty.$$

Si  $M = \mathcal{K}$  (lo cual significa que la variedad entera se contrae a un punto en el tiempo singular), hablaremos de **singularidad global**.

El ejemplo más típico de singularidad local es el siguiente:

EJEMPLO 4 (Cuello estrangulado) *Sean dos esferas  $S^n(R)$ , con  $n \geq 3$ , unidas por un cuello o tubo delgado (esto es, por una región cuya topología se parece a la del cilindro  $S^{n-1}(r) \times [-1, 1]$ ). Si  $R$  es mucho mayor que  $r$ , al evolucionar según el flujo de Ricci, el tubo se contrae más rápidamente de manera que se pinza en alguna parte antes de que las esferas  $S^n$  desaparezcan.*



<sup>5</sup>De ahora en adelante, salvo cuando se especifique lo contrario, siempre nos referiremos a las singularidades que se desarrollan en tiempo finito.

*En general, hablaremos de cuello estrangulado siempre que exista una región cilíndrica uniendo dos regiones (no necesariamente esferas) que, si colapsan, lo hacen más lentamente que el cilindro.*

¿Cómo seguir usando el flujo de Ricci cuando aparecen singularidades locales? Responderemos a esta pregunta en los apartados 6.2, 7.1 y 7.2.

## 5 PROGRAMA DE HAMILTON PARA RESOLVER LA CONJETURA DE GEOMETRIZACIÓN

Los primeros resultados de Hamilton ya anuncian que el flujo de Ricci puede convertirse en una potente herramienta para el estudio de las 3-variedades. En efecto, del teorema 3 se deduce que *toda 3-variedad Riemanniana con curvatura de Ricci positiva es homeomorfa a  $S^3/\Gamma$* . Así, con ayuda del flujo de Ricci, se prueba que la Conjetura de Geometrización es cierta para este tipo particular de 3-variedades; por tanto, parece lógico tratar de aplicar la misma técnica (con los cambios adecuados) para una demostración general.

Se conoce como programa de Hamilton a la estrategia que él mismo diseña para perseguir el ambicioso objetivo de probar la Conjetura de Geometrización usando el flujo de Ricci. En principio, se espera que la métrica evolucione hacia otra localmente homogénea en trozos de la variedad unidos a través de esferas o toros. Pero es posible que la situación se complique debido a que el flujo pueda desarrollar singularidades locales antes de que seamos capaces de extraer conclusiones topológicas sobre la variedad original. El programa divide la demostración de la conjetura en las siguientes fases:

### 5.1 FASE I. INICIO DEL FLUJO HASTA LA APARICIÓN DE LA PRIMERA SINGULARIDAD

PASO I.1 Partir de una 3-variedad  $M$  y dotarla de una métrica Riemanniana arbitraria  $g_0$ .

PASO I.2 Hacer evolucionar la métrica  $g_0$  siguiendo el flujo de Ricci hasta llegar al primer tiempo singular (si existe alguno).

- Caso 1. No hay tiempo singular. Entonces el problema quedará resuelto si se logra la **clasificación de las soluciones no singulares** y éstas tienen, a partir de un cierto  $t$ , la topología prevista por la Conjetura de Geometrización.

- Caso 2. La solución entera desaparece (singularidad global). El problema estará resuelto si se logra **clasificar las soluciones singulares globales** y éstas tienen, para  $t$  próximo al tiempo de singularidad, la topología prevista por la Conjetura de Geometrización.

- Caso 3. Se producen singularidades locales. En este caso, lo primero que deberemos hacer es clasificar los tipos de singularidades que aparecen

(problema llamado de **análisis de las singularidades**). Después de esto, la conjetura todavía estará por demostrar y habrá que continuar con la siguiente fase.

## 5.2 FASE II. FLUJO CON CIRUGÍA

PASO II.1 Si se da el caso 3, paramos el flujo en el primer tiempo singular  $T$  (o un poco antes) para hacer cirugía.

PASO II.2 Proceso de cirugía. Para poder hacerlo, es necesaria la clasificación previa de las singularidades locales. Sólo si el resultado de esta clasificación ha sido el adecuado podremos realizar técnicamente la cirugía y, como veremos, ésta se corresponderá con la cirugía del teorema de descomposición prima.

PASO II.3 Despreciar las componentes conexas de la variedad resultante de la cirugía que tengan curvatura de Ricci positiva (pues el teorema 3 asegura que son geométricas).

PASO II.4 Continuar el flujo partiendo de las restantes componentes (cada una de las cuales será la condición inicial para un flujo de Ricci empezando en  $t = T$ ) y repetir el proceso (o sea, volver al paso I.2).

## 5.3 FASE III. PROBAR LA EXISTENCIA DE UN ÚLTIMO TIEMPO SINGULAR FINITO

Hamilton espera que después de un número finito de repeticiones desde el paso I.2 hasta el final desaparezcan las singularidades y, entonces, el problema se acaba aplicando la clasificación de las soluciones no singulares.

# 6 APARTADOS DEL PROGRAMA CUBIERTOS POR EL PROPIO HAMILTON

## 6.1 SOBRE LA CLASIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES NO SINGULARES DEL PASO I.2

Bajo cierta hipótesis adicional, Hamilton realiza grandes progresos en el Paso I.2 Caso 1 de su programa (1999, cf. [14]): *si el flujo de Ricci sobre una 3-variedad  $M$  existe para todo  $t \geq 0$  y el producto  $t \cdot \text{Sec}_{g_t}(x)$  permanece acotado cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $M$  se puede descomponer en piezas geométricas.*

Perelman generalizará gran parte de los argumentos empleados en [14] para aplicarlos al flujo de Ricci con cirugía y sin formular hipótesis extra sobre la acotación de la curvatura.



## 6.2 SOBRE EL ANÁLISIS DE LAS SINGULARIDADES (CASO 3 DEL PASO I.2)

En [11], artículo donde se define el flujo de Ricci, Hamilton ya realiza dos importantes avances en el estudio de las singularidades:

- Da la primera idea acerca de su naturaleza: se producen en regiones en que la curvatura no está acotada.
- Las 3-variedades con curvatura de Ricci no negativa dan lugar a soluciones no singulares del flujo de Ricci normalizado.

De ahora en adelante, consideramos  $M_t := (M, g_t)$  una solución de (2) con  $t \in [0, T)$  y  $T < \infty$  el primer tiempo singular.

### 6.2.1 INTRODUCCIÓN DE LA TÉCNICA DE REESCALAMIENTO

Hamilton confía en probar que cualquier singularidad se comporta como una esfera (contrayéndose por completo a un punto) o está causada por una región casi cilíndrica (eliminable por un proceso de cirugía) que se estrangula. Para ello, utiliza una técnica indirecta: en lugar de analizar la estructura de la 3-variedad en el tiempo singular, construye una sucesión adecuada de soluciones  $(M, g_i(t))$  y estudia su límite  $(M_\infty, g_\infty(t))$  -si existe-.

Esta técnica se justifica por la esperanza de que dichos límites sean más fáciles de clasificar que una solución arbitraria de la ecuación. Sin embargo, conlleva dos dificultades añadidas:

- (D1) asegurar la existencia de solución límite (llamada **modelo singular**) y
- (D2) poder obtener información relevante acerca del comportamiento de la solución original a partir del modelo singular, al menos para puntos cerca de la singularidad y tiempos poco antes de su formación, pues esto nos permitirá saber si es posible hacer cirugía (como explicamos al final del Paso II.2 en la sección anterior).

Vamos a ver los pasos para la aplicación de la técnica de reescalamiento.

PRIMER PASO:

CONSTRUCCIÓN DE UNA SUCESIÓN DE DILATACIONES PARABÓLICAS

Tomada una sucesión<sup>6</sup>  $\{(x_i, t_i) : x_i \in M, t_i \rightarrow T\}$  con  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup\{|\text{Sec}_{g_{t_i}}(\Pi_i)|, \Pi_i \text{ plano de } T_{x_i}M\} = \infty$ , construimos una **sucesión de dilataciones parabólicas** de la solución  $g_t$ , esto es, una sucesión de soluciones  $\{(M, g_i(t))\}$  dada por

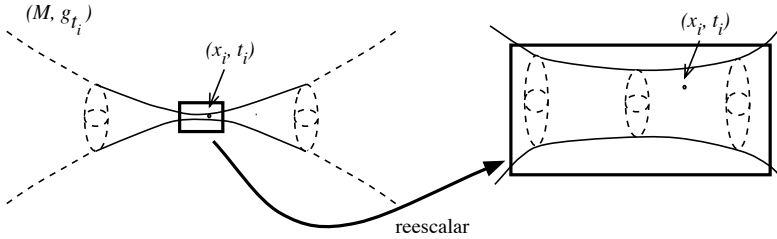
$$g_i(t) := Q_i g_{t_i + \frac{t}{Q_i}}, \quad \text{donde } Q_i := \sup\{|\text{Sec}_{g_{t_i}}(\Pi_i)|, \Pi_i \text{ plano de } T_{x_i}M\}. \quad (8)$$

---

<sup>6</sup>En un abuso de notación presente en toda la bibliografía especializada, el par  $(x_i, t_i)$  representa un punto  $x_i$  perteneciente a la variedad Riemanniana  $(M, g_{t_i})$ .

Nótese que, para cada  $i$ ,  $g_i(t)$  se ha obtenido expandiendo todas las distancias por un factor  $\sqrt{Q_i}$  y haciendo una reparametrización temporal con el fin de que  $g_i(t)$  siga siendo solución<sup>7</sup> y  $g_i(0)$  sea simplemente un múltiplo de  $g(t_i)$ .

Intuitivamente, el reescalamiento ayuda a estudiar mejor regiones muy pequeñas alrededor del punto  $(x_i, t_i)$  gracias a que se consigue un “efecto lupa”, esto es, dichas regiones se magnifican a una escala tal que el máximo de la curvatura seccional de la métrica  $g_i(0)$  en  $x_i$  sea 1.



SEGUNDO PASO:

ASEGURAR LA EXISTENCIA DE UNA SUBSUCESIÓN CONVERGENTE

Para ello, según un teorema que Hamilton prueba en 1995 (cf. [15]), hemos de verificar las dos hipótesis descritas a continuación.

(H1) Acotación superior de las curvaturas: dados  $t$  y  $r$ ,

$$|\text{Sec}|_{g_t} \leq C_{t,r} \quad \text{en } B_{g_t}(x_i, r) := \{x \in M : d_{g_t}(x, x_i) \leq r\}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

(H2) Acotación inferior del radio de inyectividad en los puntos  $x_i$  y en el instante inicial:

$$\text{inj}_{g_i(0)}(x_i) \geq K > 0 \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Para entender (H2) sin definir el radio de inyectividad basta pensar que, suponiendo (H1), (H2) se cumple si se tiene una cota inferior (independiente de  $i$ ) para las longitudes  $L_{g_i(0)}(\gamma_i)$ , donde  $\gamma_i$  es la geodésica más corta que empieza y termina en el punto  $x_i \in M$ .

### 6.2.2 PRIMERA APROXIMACIÓN A LA CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

Hamilton obtiene las cotas mencionadas en (H1) eligiendo cuidadosamente (cf. [7] p. 238) la sucesión  $(x_i, t_i)$ ; pero la condición (9) no la puede probar en

<sup>7</sup>Aquí hemos usado la invariancia por cambios de escala que comentamos tras introducir la ecuación (2).

general y, por tanto, la exige como hipótesis adicional para poder avanzar en su programa. Esto le permite establecer un resultado que da fuertes restricciones sobre la posible estructura del flujo límite.

• **Clasificación de los modelos singulares en 3 dimensiones** (cf. [12], teorema 26.5): *Suponiendo (9), siempre se puede construir una sucesión de la forma (8) que subconverge a una solución completa  $(M_\infty, g_\infty(t))$  del flujo de Ricci, donde  $t \in (-\infty, 0]$  y  $M_\infty$  es el cociente por isometrías de una de las variedades siguientes:*

(a)  $S^3$ ,

(b)  $S^2 \times \mathbb{R}$  (región cilíndrica),

(c)  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , donde  $\Sigma$  es  $\mathbb{R}^2$  con la métrica  $\frac{dx^2+dy^2}{1+x^2+y^2}$ . Un flujo de Ricci con condición inicial  $\Sigma \times \mathbb{R}$  se conoce como **solitón cigar**.

### 6.2.3 PROBLEMAS DE LA TÉCNICA DE HAMILTON PARA CLASIFICAR SINGULARIDADES

En primer lugar, nótese que las topologías del modelo singular y de la variedad original pueden ser muy distintas, pues gran parte de la variedad se puede ir a infinito en el reescalamiento. Luego Hamilton deja pendiente la resolución de la dificultad (D2) -ver 6.2.1 -.

Por otra parte, el resultado del apartado anterior no soluciona (D1) de forma satisfactoria, ya que todavía deja dos tareas pendientes:

(D1-1) demostrar (y no simplemente suponer) la acotación (9),

(D1-2) justificar que se obtienen todos los posibles modelos singulares usando sólo el tipo particular de sucesiones  $(x_i, t_i)$  elegido por Hamilton.

Aun suponiendo resueltas las cuestiones (D1) y (D2), nos encontramos con una importante obstrucción a la hora de llevar a cabo el programa de Hamilton: no hay ninguna manera clara de hacer cirugía en una singularidad con la estructura topológica de (c) (del solitón cigar). De hecho, Hamilton afirma que (c) no puede suceder realmente (**Conjetura de Hamilton**); sin embargo, aunque da algunas ideas, no es capaz de probarlo.

Todas estas cuestiones permanecen abiertas hasta la aparición de [26] a finales de 2002.

### 6.3 SOBRE LA CIRUGÍA (FASE II)

Hamilton introduce técnicas específicas para llevar a cabo la cirugía en dimensión 4 (cf. [13]); éstas serán adaptadas por Perelman (cf. [27]) al caso 3-dimensional.

## 7 APORTACIÓN DE PERELMAN AL PROGRAMA DE HAMILTON

### 7.1 EN EL ANÁLISIS DE SINGULARIDADES

#### 7.1.1 TEOREMA DE NO COLAPSO LOCAL (PASO I.2, CASO 3)

Es un teorema clave que recibe este nombre en ([26], §4 y §7.3). Afirma que, en toda solución del flujo de Ricci, la acotación de la curvatura dentro de una bola implica la acotación inferior del volumen de dicha bola, siendo esto último equivalente a una acotación del radio de inyectividad (cf.[5], teorema 4.7). Este resultado también se verifica para cualquier modelo singular, pero no se cumple para el solitón cigar; así, se elimina la opción (c) de la clasificación del apartado 6.2.2 .

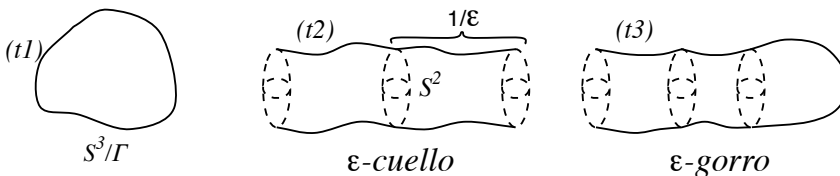
En definitiva, el citado teorema constituye la primera gran aportación de Perelman al programa de Hamilton, pues le permite realizar una doble tarea:

- (i) prueba la Conjetura de Hamilton y
- (ii) da un argumento general que proporciona la estimación (9) (soluciona el problema (D1-1)).

#### 7.1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS $\kappa$ -SOLUCIONES

En lugar de analizar directamente los modelos singulares 3-dimensionales, Perelman estudia ([26], §11) un tipo particular de soluciones de (2) con las mismas propiedades que dichos modelos: las  $\kappa$ -soluciones. Nos interesa destacar la siguiente clasificación local: *dado cualquier  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, todo punto en una  $\kappa$ -solución tiene un entorno (de tamaño controlado) que pertenece a uno de los tipos:*

- (t1) una componente conexa difeomorfa a un cociente  $S^3/\Gamma$ ,
- (t2) un  $\epsilon$ -cuello: tubo largo y fino que, tras reescalar la métrica, está  $\epsilon$ -próximo a  $S^2 \times I$ , donde  $I$  es de longitud  $2/\epsilon$  y  $S^2$  tiene curvatura seccional constante  $1/2$ ,
- (t3) un  $\epsilon$ -gorro: componente difeomorfa a  $B^3$  ó  $\mathbb{R}P^3 \setminus B^3$  con curvatura acotada y tal que fuera de algún conjunto compacto puede recubrirse por  $\epsilon$ -cuellos.



7.1.3 GEOMETRÍA DE LAS REGIONES DE CURVATURA ELEVADA

Perelman completa su análisis de las singularidades clasificando las posibles estructuras que pueden presentar las regiones de curvatura elevada, pues sabemos que en ellas se producen las singularidades.

Perelman muestra (cf.[26], §12.1) que cualquier punto de curvatura suficientemente grande tiene un entorno que, tras un reescalamiento parabólico de la solución, está  $\epsilon$ -próximo a una región perteneciente a uno de los tipos (t1), (t2) o (t3). Por lo tanto, la solución cerca del tiempo singular tiene una estructura local muy parecida a la de un modelo singular. Notemos que esto resuelve las dificultades (D1-2) y (D2) -comentadas en 6.2.1 y 6.2.3 -.

7.2 EN EL FLUJO DE RICCI CON CIRUGÍA

7.2.1 ESTRUCTURA DE LA VARIEDAD EN EL TIEMPO SINGULAR

Una vez conocida la geometría de las regiones de curvatura elevada, se prueba (cf. [27], §3) que, en el tiempo singular,  $M_T$  se puede descomponer<sup>8</sup> como la unión disjunta

$$M_T = M_{ps} \sqcup M_{gc} \sqcup M_{ce},$$

donde

- $M_{ps} := \{\text{conjunto de puntos singulares}\} = \{x \in M_T : \lim_{t \rightarrow T^-} |\text{Sec}(x, t)| = \infty\}$ ,
- $M_{gc}$  es la parte de geometría controlada (en el sentido de que la curvatura no es demasiado grande) y
- $M_{ce}$  contiene las regiones de curvatura elevada.

Al encontrarnos en el instante singular, claramente  $M_{ps} \neq \emptyset$ ; pero es posible que  $M_{gc} \sqcup M_{ce} = \emptyset$ . En ese caso, la solución entera se **extingue** cuando  $t \rightarrow T$  (dado que la curvatura no está acotada en ningún punto de la variedad) y  $M \in \{S^3/\Gamma, S^1 \times S^2, \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3\}$ , lo que soluciona el Paso I.2 Caso 2.

Si  $M_{gc} \sqcup M_{ce} \neq \emptyset$ , el objetivo será describir la estructura de  $M_{ce}$ ; esto se debe a que en  $M_{gc}$  la curvatura está acotada y, en consecuencia, es una región alejada de las zonas donde se han producido las singularidades. Por otro lado, nos podemos olvidar de  $M_{ps}$ , pues es la parte de la variedad que, en cierta manera, desaparece en el tiempo singular.

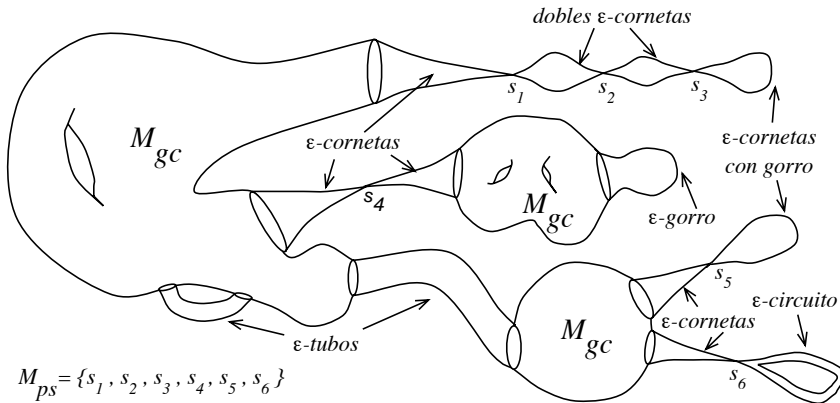
Por lo comentado en 7.1.3, sabemos que cualquier punto de  $M_{ce}$  tiene un entorno del tipo (t1), (t2) o (t3). Esta información nos servirá para concluir que  $M_{ce}$  es una unión (posiblemente infinita) de componentes conexas pertenecientes a los grupos descritos a continuación.

---

<sup>8</sup>En [27], esta descomposición se hace en función de una constante fijada  $\rho$  (que será uno de los parámetros que controlarán la cirugía) y la notación que se emplea es  $M_{ps} =: M \setminus \Omega$ ,  $M_{gc} \sqcup M_{ce} =: \Omega$  y  $M_{gc} =: \Omega_\rho$ .

- (1) Componentes difeomorfas a un cociente  $S^3/\Gamma$ .
- (2) Componentes con borde en  $M_{gc}$ .
  - (2a)  $\epsilon$ -**tubos**: difeomorfas a  $S^2 \times [0, 1]$ .
  - (2b)  $\epsilon$ -**gorros**.
  - (2c)  $\epsilon$ -**cornetas**: difeomorfas a  $S^2 \times [0, 1)$ , o sea,  $\sup\{|\text{Sec}_{g_{t_i}}(\Pi_i)|, \Pi_i \text{ plano de } T_{x_i}M\} \rightarrow \infty$  en el extremo cuyo borde es disjunto de  $M_{gc}$ .
- (3) Componentes disjuntas de  $M_{gc}$ .
  - (3a)  $\epsilon$ -**cornetas con gorro**:  $\sup\{|\text{Sec}_{g_{t_i}}(\Pi_i)|, \Pi_i \text{ plano de } T_{x_i}M\} \rightarrow \infty$  en el extremo.
  - (3b) **dobles**  $\epsilon$ -**cornetas**: difeomorfas a  $S^2 \times (0, 1)$ , i.e.,  $\sup\{|\text{Sec}_{g_{t_i}}(\Pi_i)|, \Pi_i \text{ plano de } T_{x_i}M\} \rightarrow \infty$  en ambos extremos.
  - (3c)  $\epsilon$ -**circuitos**: difeomorfas a  $S^2 \times S^1$ .

En las componentes (2a), (2c), (3b) y (3c) todo punto está contenido en un  $\epsilon$ -cuello; mientras que en (2b) y (3a) lo mismo es cierto fuera de algún compacto.



### 7.2.2 DESCRIPCIÓN CUALITATIVA DE LAS FASES DEL PROCESO DE CIRUGÍA

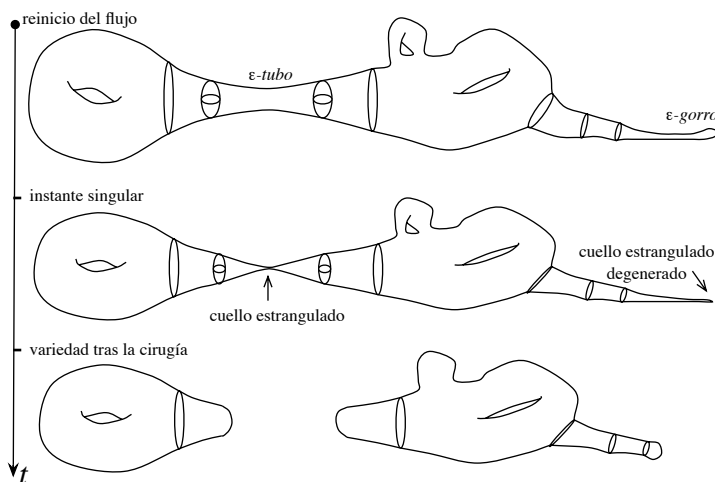
(C1) Despreciar las componentes de  $M_{ce}$  de los grupos (1) y (3), o sea, el flujo ya no se continúa con ellas. Aunque esto modifica la topología de la variedad original, los trozos eliminados son homeomorfos a  $S^3/\Gamma$  o a  $S^2 \times S^1$  y, por tanto, se trata de piezas de la descomposición en primos que sabemos identificar topológicamente, pues para ellas se verifica la Conjetura de Geometrización.

(C2) Cortar las  $\epsilon$ -cornetas a lo largo de la 2-esfera central de un  $\delta$ -cuello ( $\delta < \epsilon$ ) y desechar la porción de curvatura no acotada.

(C3) Añadir una 3-bola topológica a la 2-esfera borde creada en (C2).

(C4) Continuar el flujo hasta que se formen nuevas singularidades y repetir el proceso de cirugía. Obsérvese que los  $\epsilon$ -tubos y  $\epsilon$ -gorros pueden dar lugar a nuevas  $\epsilon$ -cornetas en el siguiente tiempo singular.

Cabe destacar que este proceso de cirugía se corresponde con la que se realiza en la descomposición en primos (caso del cuello estrangulado de la figura siguiente), si bien en el transcurso del flujo puede que se realicen algunas descomposiciones topológicamente triviales (caso del cuello estrangulado degenerado de la misma figura) pero necesarias para reducir la curvatura y poder reiniciar el flujo.



7.2.3 SOBRE LA FASE III DEL PROGRAMA DE HAMILTON (cf. 5.3)

Perelman no logra demostrar lo que Hamilton esperaba: que al cabo de un tiempo finito ya no aparecerían más singularidades. Pero tampoco lo necesita. En lugar de ello:

- Asegura un doble control sobre el número de cirugías:

- **En cada tiempo singular:** se prueba que, salvo un número finito, todas las componentes de  $M_{ce}$  son dobles cornetas. Como éstas se desprecian en (C1), sólo queda un número finito de componentes sobre las que, si es necesario, habrá que hacer cirugía.

- **A lo largo del tiempo:** los tiempos de cirugía son localmente finitos (esto es, en cada intervalo  $[t_1, t_2]$  existe un número finito de instantes singulares). Esto se prueba si, en cada paso, la cirugía se efectúa de manera que disminuya el volumen de la variedad en una cantidad finita.

• Prueba el siguiente **comportamiento asintótico del flujo con cirugía**:

(1) El flujo con cirugía, si no se extingue, se puede extender para todo tiempo  $t \in [0, \infty)$ .

(2) Cuando  $t$  es suficientemente grande,  $M_t(= (M, g_t))$  admite una descomposición en dos trozos (posiblemente vacíos)

$$M_t = M_{thick} \cup M_{thin}. \quad (10)$$

(3) *Estudio de  $M_{thick}$*  (cf. [27]). Está formado por una colección finita de variedades completas hiperbólicas de volumen finito pegadas entre sí por toros incompresibles en  $M_t$ . Además, ya no habrá más singularidades en esta región; por tanto, el flujo de Ricci sin cirugías existe en  $M_{thick}$  para un intervalo de tiempo infinito.

(4) *Estudio de  $M_{thin}$* . Se trata de una variedad grafo<sup>9</sup> (según una prueba que aparece [32]) con un número finito de componentes. De (3) se deduce que todas las singularidades que puedan producirse en tiempos posteriores a  $t$  corresponderán a puntos de  $M_{thin}$ . Pero eso ya no es problema, pues es conocido que las variedades grafo admiten una descomposición geométrica.

(5)  $M_{thick}$  y  $M_{thin}$  se unen a lo largo de toros incompresibles, luego (10) corresponde a la descomposición tórica.

(6) *Conclusión*. La descomposición por esferas de la variedad original  $M$  es de la forma

$$M \cong P_1 \# \dots \# P_r \# (S^3/\Gamma_1) \# \dots \# (S^3/\Gamma_k) \# S^1 \times S^2 \# \dots \# S^1 \times S^2, \quad (11)$$

donde cada  $P_i$  admite una descomposición tórica como  $H_i \cup G_i$ , siendo  $H_i$  hiperbólica y  $G_i$  una variedad grafo (ambas posiblemente desconexas). Luego hemos visto que  $M$  se descompone topológicamente en piezas geométricas, **cosa que prueba de la Conjetura de Geometrización y, como corolario, la Conjetura de Poincaré**.

Pero, además, en un tercer *preprint* ([28], corroborado por [8]), Perelman da una

### 7.3 PRUEBA ALTERNATIVA (INDEPENDIENTE DE 7.2.3) DE LA CONJETURA DE POINCARÉ

Se hace en tres pasos:

PASO 1. Mostrar que, si la variedad original  $M$  tiene grupo fundamental finito, entonces el flujo de Ricci con cirugía se extingue en un tiempo finito. Esto significa que, para demostrar la Conjetura de Eliptización (y, en particular, la de Poincaré) no se necesitan los resultados sobre la descomposición (10).

<sup>9</sup>Una variedad grafo es una 3-variedad formada por una colección finita de espacios fibrados Seifert pegados a lo largo de toros embebidos disjuntos.



PASO 2. *Reconstrucción de la variedad original.* Por lo dicho en 7.2.2 y por el teorema 3, los trozos que se extinguen o desprecian son, cada uno, difeomorfos a  $S^3/\Gamma$ ,  $S^1 \times S^2$  ó  $S^1 \times S^2/\mathbb{Z}_2$ . Luego la variedad original  $M$  es difeomorfa a una suma conexas<sup>10</sup> de los anteriores elementos (posiblemente, con nuevos factores  $S^1 \times S^2$ ):

$$M \cong (S^3/\Gamma_1)\sharp\dots\sharp(S^3/\Gamma_k)\sharp S^1 \times S^2\sharp\dots\sharp S^1 \times S^2. \quad (12)$$

PASO 3. Aplicando el teorema de Van Kampen, el grupo fundamental de  $M$  vendrá dado por

$$\pi_1(M) = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_k * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}.$$

Como  $\pi_1(M)$  está formado por un solo punto (debido a que  $M$  es simplemente conexa), podemos concluir que  $\Gamma_i$  también contiene un único punto ( $i = 1, \dots, k$ ) y no pueden aparecer factores de la forma  $S^1 \times S^2$  en (12). Así pues,

$$M \cong S^3\sharp\dots\sharp S^3 \cong S^3,$$

siendo cierto esto último por ser  $S^3$  el elemento neutro de la suma conexas.

Con esto queda probada la Conjetura de Poincaré.

## 8 EPÍLOGO

Hemos intentado dar cuenta de uno de los “teoremas” más fascinantes de la historia de las matemáticas contemporáneas. En su “demostración” se combinan Geometría, Álgebra, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Topología, ... y no hemos dicho nada de la influencia que la Física Estadística y la Teoría de cuerdas han tenido en las ideas de Perelman.

La parte de Perelman todavía no ha sido corroborada. Es opinión general que se trata de un trabajo valioso en sí mismo, pues contiene nuevas ideas y técnicas que suponen enormes avances en el estudio del flujo de Ricci. En estos momentos, todo parece indicar que los expertos han dado por válido gran parte de [26] y la prueba de la conjetura de Poincaré contenida en [28]. Respecto al resto del trabajo, dichos expertos no se han decidido a afirmar con absoluta seguridad (a menos, a fecha de 16 de julio de 2005) si la “demostración” de Perelman es correcta (pese a que él la dio por acabada en junio de 2003); sin embargo, todos se quedarían muy sorprendidos si alguien encontrara algún error que la invalide.

---

<sup>10</sup>Notar que en (12) están incluidos los cocientes  $S^1 \times S^2/\mathbb{Z}_2$ , pues topológicamente son como  $\mathbb{R}P^3\sharp\mathbb{R}P^3$  y  $\mathbb{R}P^3 = S^3/\{\pm Id\}$ .

## AGRADECIMIENTOS

Queremos dar un agradecimiento especial a la persona que, con su entusiasmo y trabajo, nos metió por primera vez por estos caminos: Alexander Borisenko, que nos enseñó tantas cosas en el curso que dió en Valencia en 2004, aproximadamente recogido en [3].

La primera autora quiere agradecer, además, a todas aquellas personas que, con su apoyo, han hecho posible su estancia en los cursos de verano de Trieste y del M.S.R.I. sobre el flujo de Ricci y la Conjetura de Geometrización en junio-julio de 2005: Karsten Grove, Luis Guijarro, Vicente Miquel, Joan Porti y Antonio Ros. Y, entre los profesores de esos cursos, quiere agradecer especialmente la atención que le han prestado Bennet Chow, John Lott y Carlo Sinestrari.

E. Cabezas Rivas fue sufragada por una Beca del Programa Nacional de Formación del Profesorado Universitario ref: AP2003-3344 y, parcialmente, por DGI (España) y FEDER Project MTM 2004-06015-C02-01.

V. Miquel Molina fue sufragado parcialmente por los Proyectos DGI (España) y FEDER MTM 2004-06015-C02-01, y AVCiT GRUPOS 03/169, y disfrutó de un año sabático de la Universidad de Valencia durante el tiempo en que estas notas fueron escritas.

## REFERENCIAS

- [1] M. T. ANDERSON, Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow. *Notices Amer. Math. Soc.* **51** (2004), no. 2, 184–193.
- [2] M.T. ANDERSON, Scalar curvature and geometrization conjectures for three-manifolds, Comparison Geometry (Berkeley, 1993-94), *MSRI Publ.* **30** (1997), 49–82.
- [3] A. BORISENKO, E. CABEZAS-RIVAS, V. MIQUEL, *An introduction to Hamilton and Perelman's work on the conjectures of Poincaré and Thurston*, Preprint, (2005). Accesible en <http://www.uv.es/miquel/Papers/BCMoHP.pdf>
- [4] H. D. CAO AND B. CHOW, Recent developments on the Ricci flow, *Bull. Amer. Math. Soc.* **36** (1999) 59–74.
- [5] J. CHEEGER, M. GROMOV AND M. TAYLOR, Finite Propagation Speed, Kernel Estimates for Functions of the Laplace Operator, and the Geometry of Complete Riemannian Manifolds, *J. Differential Geometry* **17** (1982) 15–53.
- [6] B. CHOW, *A survey of Hamilton's program for the Ricci flow on 3-manifolds*, [math.DG/0211266v1](http://math.DG/0211266v1), 2002.
- [7] B. CHOW AND D. KNOPF, *The Ricci flow: An introduction*, Mathematical surveys and monographs; no. 110, American Mathematical Society, Rhode Island, 2004.

- [8] T. COLDING AND W. MINICOZZI, *Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman*, [arXiv.math.DG/0308090](https://arxiv.org/abs/math/0308090).
- [9] D. DETURCK, Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors, *J. Differential Geom.* **18** (1983) 157–162.
- [10] J. EELLS AND J. SAMPSON, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **86** (1964) 109–160.
- [11] R.S.HAMILTON, Three manifolds with positive Ricci curvature, *Jour. Diff. Geom.* **17** (1982), 255–306.
- [12] R.S.HAMILTON, Formation of singularities in the Ricci flow, *Surveys in Diff. Geom.* **2** (1995), 7–136.
- [13] R.S.HAMILTON, Four-manifolds with positive isotropic curvature. *Commun. Anal. Geom.* **5** (1997), 1–92.
- [14] R.S.HAMILTON, Non-singular solutions of the Ricci flow on three manifolds, *Commun. Anal. Geom.* **7** (1999), 695–729.
- [15] R.S.HAMILTON, A compactness property for solutions of the Ricci flow. *Amer. Jour. Math.* **117** (1995), 545–572.
- [16] A. HATCHER, *Basic Topology of 3-Manifolds*.  
[http:// www.math.cornell.edu/ hatcher](http://www.math.cornell.edu/hatcher).
- [17] J. HEMPEL, *3-Manifolds*, Annals of Math. Studies 86, Princeton Univ. Press, Princeton, 1976.
- [18] W. JACO AND P. SHALEN, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **21** (1979), no. 220, 192 pp.
- [19] K. JOHANNSON, *Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math, 761, Springer, Berlin, 1979.
- [20] B. KLEINER AND J. LOTT, *Notes on Perelman’s paper*  
[http:// www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html](http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html)
- [21] H. KNESER, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannifaltigkeiten*, *Jahres. Deut. Math. Verein.* **38** (1929) 248–260.
- [22] J. MILNOR, A unique factorization theorem for 3-manifolds, *Amer. J. Math.* **84** (1962), 1–7.
- [23] J. MILNOR, Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds, *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003) 1226–1233.
- [24] J. MORGAN, Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (2005) 57–78.
- [25] V. MUÑOZ, *Cien años de la Conjetura de Poincaré* LA GACETA DE LA RSME, **7** (2003) 3, 629–653.
- [26] G. PERELMAN, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, [arXiv:math.DG/0211159](https://arxiv.org/abs/math/0211159).

- [27] G. PERELMAN, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, [arXiv:math.DG/0303109v1](https://arxiv.org/abs/math/0303109v1).
- [28] G. PERELMAN, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint, [arXiv.math.DG/0307245](https://arxiv.org/abs/math/0307245), July 17, 2003.
- [29] C. PETRONIO, *Introduction to 3-manifold topology*, Notes of the Summer School and Conference on Geometry and Topology of 3-manifolds, SMR1662/1.
- [30] H. POINCARÉ, Cinquième complément à l'analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **18** (1904), 45–110. (También *Oeuvres, Tome VI*, Paris, 1953, p. 498).
- [31] P. SCOTT, The geometries of 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), 401–487.
- [32] T. SHIOYA AND T. YAMAGUCHI, *Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound*, [arXiv.math.DG/0304472](https://arxiv.org/abs/math/0304472), April 15, 2003.
- [33] C. SINISTRARI, *Introduction to the Ricci flow*, Notes of the Summer School and Conference on Geometry and Topology of 3-manifolds, SMR1662/4.
- [34] T. SAKAI, *Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [35] W.P. THURSTON, *Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1*, Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 1997.

Esther Cabezas Rivas  
Vicente Miquel Molina  
Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Valencia  
Av. Vicent Andrés Estellés 1  
46100 Burjassot (Valencia)

Correo electrónico: [esther.cabezas@uv.es](mailto:esther.cabezas@uv.es)  
[vicente.f.miquel@uv.es](mailto:vicente.f.miquel@uv.es)