La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

XX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

por

Juan Manuel Conde Calero y Sergi Elizalde Torrent

Del 23 de septiembre al 1 de octubre de 2005 se celebró la XX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM) en Cartagena de Indias (Colombia). Esta olimpiada tuvo un significado especial, porque fue precisamente en Colombia donde hace veinte años se celebró la primera edición de la OIM. Como en la XIX OIM celebrada el año pasado en Castellón, asistieron todos los países iberoamericanos: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela.

Cada país estaba representado por hasta cuatro estudiantes, un jefe de delegación y un tutor. El número total de estudiantes que participaron en la olimpiada fue de ochenta y cinco. El equipo español estaba integrado por Elisa Lorenzo García, Javier de la Nuez González, Hugo Fernández Hervás (los tres de Madrid), y Marc Viñals Pérez (de Gerona). Los dos profesores acompañantes fueron Juan Manuel Conde Calero, de la Universidad de Alicante, y Sergi Elizalde Torrent, de Dartmouth College (Estados Unidos) como tutor.

El Jurado Internacional, compuesto por los veintidós Jefes de Delegación de cada país, fue el encargado de seleccionar los problemas para las pruebas. La prueba consistía en dos sesiones, de tres problemas y cuatro horas y media cada una, en dos días consecutivos. La puntuación máxima en cada problema era de siete puntos. Se entregaron en total 8 medallas de oro, 17 de plata y 23 de bronce.

El equipo español consiguió dos medallas de plata: Elisa Lorenzo, 28 puntos, y Javier de la Nuez, 22 puntos; y dos medallas de bronce: Hugo Fernández, 16 puntos, y Marc Viñals, 15 puntos.

Los estudiantes y el tutor estuvieron alojados en el hotel Caribe de Cartagena de Indias. Durante los días anteriores a la prueba no se les permitía salir del hotel para que no obtuviesen información de los jefes de delegación sobre los problemas que saldrían en la prueba. Los exámenes se celebraron los días 27 y 28 de septiembre en la Agencia Española de Cooperación Internacional. Los problemas son siempre de matemática elemental, pero resolverlos requiere intuición, ingenio e imaginación. Además, para conseguir la máxima puntuación en un problema es necesaria una formulación clara y precisa, análisis de todos los casos y rigor.

Los enunciados de los seis problemas fueron los siguientes:

Problema 1

Determine todas las ternas de números reales (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$xyz = 8$$

$$x^2y + y^2z + z^2x = 73$$

$$x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 = 73$$

Problema 2

Una pulga salta sobre puntos enteros de la recta numérica. En su primer movimiento salta desde el punto 0 y cae en el punto 1. Luego, si en un movimiento la pulga saltó desde el punto a y cayó en el punto b, en el siguiente movimiento salta desde el punto b y cae en uno de los puntos $b + (b - a) - 1$, $b + (b - a)$, $b + (b - a) + 1$.
Demuestre que si la pulga ha caído dos veces sobre el punto n, para n entero positivo, entonces ha debido hacer al menos t movimientos, donde t es el mayor entero positivo mayor o igual que $2\sqrt{n}$.

Problema 3

Sea p mayor que 3 un número primo. Si

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{n}{m}$$

donde el máximo común divisor de n y m es 1, demuestre que p^3 divide a n.

Problema 4

Dados dos enteros positivos a y b, se denota por $a \bigtriangledown b$ el residuo que se obtiene al dividir a por b. Este residuo es uno de los números 0, 1, ... , $b-1$. Encuentre todas las parejas de números (a, p) tales que p es primo y se cumple que

$$(a \bigtriangledown p) + (a \bigtriangledown 2p) + (a \bigtriangledown 3p) + (a \bigtriangledown 4p) = a + p$$

Problema 5

Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y A_1 un punto en el arco menor BC de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Sean A_2 y A_3 puntos en los lados AB y AC respectivamente tales que $\angle BA_1A_2 = \angle OAC$ y $\angle CA_1A_3 = \angle OAB$. Demuestre que la recta A_2A_3 pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

Problema 6

Dado un entero positivo n, en un plano se consideran $2n$ puntos alineados $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Cada punto se colorea de azul o de rojo mediante el siguiente procedimiento:
En el plano se trazan n circunferencias con diámetros de extremos A_i y A_j, disjuntas dos a dos. Cada A_k, $1 \leq k \leq 2n$, pertenece exactamente a una circunferencia. Se colorean los puntos de modo que los dos puntos de una misma circunferencia lleven el mismo color.
Determine cuántas coloraciones distintas de los $2n$ puntos se pueden obtener al variar las n circunferencias y la distribución de los colores.

Puntuaciones medias:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Globales	3.71	1.77	1.27	4.28	2.82	0.60
Equipo español	3.2	3.75	1.25	5	6.75	0.25

La medalla de oro se concedió a puntuaciones comprendidas entre los 33 y 42 puntos; la de plata, entre 22 y 32 puntos, y la de bronce entre los 10 y 21 puntos.

El trabajo más importante para los profesores (tutor y jefe de delegación) se realiza durante los días de corrección de las pruebas y la posterior discusión

con el Jurado. Los profesores leen y analizan las soluciones de cada concursante del equipo en cada problema, para adaptarlas a los criterios de corrección, y decidir cual es la puntuación merecida en cada caso. A continuación, esas puntuaciones deben defenderse delante de los coordinadores de cada problema, y ponerse de acuerdo con ellos en la puntuación definitiva. En algunos casos la discusión puede llevar bastante tiempo.
Previamente a esta OIM, entre los días 22 y 24 de septiembre, tuvo lugar un Seminario de resolución de problemas, impartido por Andrew Liu (Canadá), Titu Andrescu (Estados Unidos), Eduardo Wagner (Brasil), Patricia Fauring (Argentina) y María Falk de Losada (Colombia).

La XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se celebrará en Guayaquil (Ecuador) en septiembre de 2006.

Juan Manuel Conde Calero
Universidad de Alicante

Sergi Elizalde Torrent
Dartmouth College
New Hampshire (EEUU)

Solución al problema 6

por

Sergi Elizalde Torrent

Vamos a demostrar que el número de coloraciones distintas que se pueden obtener es $2n$ sobre n. Consideremos caminos en el plano desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(2n, 0)$, donde cada paso es o bien un segmento ascendente $(1, 1)$ o bien un segmento descendente $(1, -1)$. Claramente un camino de este tipo debe estar formado por n pasos ascendentes y n pasos descendentes, que pueden estar en cualquier orden. Por lo tanto, el número de dichos caminos es $2n$ sobre n. A continuación construiremos una biyección entre dichos caminos y coloraciones como la del enunciado (llamemos a estas coloraciones *coloraciones permisibles*).

Dado un camino, llamando a sus pasos de izquierda a derecha $p_1 p_2 ... p_{2n}$, vamos a asignarle una coloración de los $2n$ puntos. Coloreamos el plano con franjas horizontales de altura 1, de modo que la franja con ordenadas entre m y $m + 1$ (donde m es cualquier entero) se colorea de azul si m es par y de rojo si m es impar. Cada paso p_i del camino atraviesa una franja, azul o roja. Nuestra biyección envía el camino a la coloración tal que cada A_i se colorea del color de la franja que el paso p_i atraviesa.

Demostremos ahora que la coloración que hemos construido es permisible. Cada franja del plano es atravesada un número par de veces. En cada franja, podemos aparear los pasos que la atraviesan de izquierda a derecha, es decir, el paso que atraviesa la franja por primera vez se aparea con el que la atraviesa por segunda vez, el que la atraviesa por tercera vez se aparea con el que la atraviesa por cuarta vez, etcétera. De este modo, todos los pasos del camino quedan apareados. Si el paso p_i queda apareado con el paso p_j, trazamos una circunferencia de diámetro de extremos A_i y A_j, del mismo color de la franja que p_i y p_j atraviesan. Este proceso produce la coloración deseada.

Finalmente, vamos a demostrar que el proceso que envía cada camino a una coloración es reversible, y por tanto es una biyección. Para ello, dada una coloración de los $2n$ puntos, recuperamos el camino empezando desde el origen $(0, 0)$ y añadiendo cada paso p_i, con $1 \leq i \leq 2n$, de la siguiente forma: una vez los primeros $i - 1$ pasos del camino han sido construidos, dibujamos el paso p_i ascendente o descente de modo que la franja que atraviese tenga el color del punto A_i. Como franjas contiguas tienen diferente color, añadir un paso con esta condición siempre es posible, y la condición determina el camino de forma única. Además, el hecho de que la coloración es permisible garantiza que el camino construido termina en el punto $(2n, 0)$.

Puntuación por equipos

Argentina	115
Bolivia	11
Brasil	143
Chile	54
Colombia	61
Costa Rica	53
Cuba	96
Ecuador	18
España	81
Guatemala	29
Honduras	21
México	121
Nicaragua	5
Panamá	56
Paraguay	22
Perú	102
Portugal	43
Puerto Rico	27
Rep. Dominicana	9
Salvador	32
Uruguay	78
Venezuela	44

Observaciones: Nicaragua participó con tres estudiantes y Paraguay con dos estudiantes. El resto de los países participaron con cuatro estudiantes.