La Columna de Matemática Computacional

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta*, alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página[1]) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.*

En este número...

... de La Gaceta, presentamos un artículo del profesor David Cox, del Amherst College (Massachusetts, USA), sobre la relación, en diferentes contextos (docente, investigador), entre el Álgebra y la Matemática Aplicada. Se trata de un artículo que apareció primero en inglés, bajo el título "What is the role of Algebra in Applied Mathematics?" en *La Gazette des Mathematiciens*, Avril 2005, no. 104, pp. 13–22; y en las *Notices of the AMS*, November 2005. Se reproduce aquí con permiso de la editora de *La Gazette*, Dña. Colette Anne, a quien agradecemos su amabilidad.

La aparición de este texto en las revistas de esas dos prestigiosas sociedades es, pues, un aval del interés del mismo. La versión de La Gaceta es la primera traducción a otro idioma, lo que ha sido posible gracias al Dr. Carlos D'Andrea, Investigador Ramón y Cajal de la Universidad de Barcelona, experto en Geometría Algebraica Computacional, y que ha publicado algún trabajo con el profesor Cox.

David Cox (Ph. D., Princeton University, 1975), es un reconocido investigador en diversos aspectos, puros y aplicados, de Geometría Algebraica. Es, también, un extraordinario divulgador y escritor de libros de texto en ese difícil campo de las matemáticas.

Entre todos ellos destacaríamos su obra *Ideals, Varieties, and Algorithms* (con John Little y Don O'Shea) que lleva ya tres ediciones (la última en 2006) en la colección de Springer de libros de textos para la licenciatura y ha sido traducida al ruso y al japonés, así como la segunda parte de la misma, *Using Algebraic Geometry* (también con John Little y Don O'Shea), cuya segunda edición en Springer ha sido publicada en 2005, y que también ha sido traducida al japonés.

[1]Tomás Recio. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander. tomas.recio@unican.es

¿Cuál es el papel del Álgebra en la Matemática Aplicada?

por

David A. Cox

Cuando tuve mi primer encuentro con el Álgebra Abstracta, a finales de los años sesenta del siglo pasado, fui seducido por su poder y belleza. Una de las ideas liberadoras de esta disciplina es que, al trabajar con estructuras algebraicas, uno no necesita preocuparse sobre cuál es el objeto que manipulamos; lo importante es cómo se comporta. El Álgebra es un lenguaje maravilloso para describir el comportamiento de los objetos matemáticos.

Mi fascinación por el Álgebra me llevó hacia la Geometría Algebraica que, en aquel momento, estaba entre las áreas mas abstractas de la matemática pura. Nunca hubiera predicho que, 25 años más tarde, estaría escribiendo trabajos en colaboración con especialistas en Ciencias de la Computación, donde usamos Geometría Algebraica y Álgebra Conmutativa para resolver problemas de Modelización Geométrica. El Álgebra que aprendí pura y abstracta ha resultado tener aplicaciones significativas.

¿Qué es lo que éstas y otras aplicaciones conllevan sobre la relación entre el Álgebra y la Matemática Aplicada? El propósito de este artículo es explorar algunos aspectos de esta relación, con la esperanza de provocar un debate beneficioso entre matemáticas puras y aplicadas. Aquí por "Matemática Aplicada" entendemos no sólo aquello que los estudiantes aprenden en los departamentos de Matemática Aplicada, sino también las matemáticas que se aprenden en los departamentos de Ciencias de la Computación, Ingeniería e Investigación Operativa.

Comenzaremos con ejemplos provenientes de la Modelización Geométrica, de la Economía y de la teoría de Curvas Splines para ilustrar las posibles aplicaciones del Álgebra. Luego hablaremos de Álgebra Computacional y concluiremos con reflexiones sobre el papel del Álgebra en el currículo de Matemática Aplicada.

Modelización Geométrica, Regla de Cramer y Módulos

Este primer ejemplo contiene una aplicación sorprendente de la regla de Cramer y del teorema de Hilbert-Burch (sobre la estructura de ciertas resoluciones libres). La regla de Cramer debería ser familiar para el lector, mientras que el concepto de resolución libre (sea lo que sea) puede sonarle más bien abstracto. Como veremos, ambos conceptos surgen en Modelización Geométrica de manera natural.

Mi historia en este asunto comienza a partir del trabajo de investigacion de Tom Sederberg y Falai Chen sobre curvas paramétricas en el plano. Dados $a(t), b(t), c(t)$, polinomios relativamente primos de grado n, las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{a(t)}{c(t)}, \quad y = \frac{b(t)}{c(t)} \tag{1}$$

describen una curva en el plano. Para interpretar geométricamente este objeto, Sederberg y Chen [23] consideraron rectas definidas por

$$A(t)x + B(t)y + C(t) = 0, \tag{2}$$

donde $A(t), B(t), C(t)$ son polinomios dependiendo de un parámetro t. Cuando hacemos variar t también varía la recta (2), por ello recibe el nombre de *recta móvil.* Una recta móvil *sigue* a una parametrización dada si, para cada valor del paramétro, el punto correspondiente de la curva se encuentra sobre la correspondiente recta. En otras palabras, si (1) es una solución de (2), para todo t.

Si sustituimos (1) en (2) y quitamos denominadores, obtenemos la ecuación

$$A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t) \equiv 0, \tag{3}$$

donde $\equiv$ indica que la igualdad es cierta para todo t, es decir, $A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t)$ es el polinomio idénticamente nulo.

¿Qué estructuras algebraicas podemos usar aquí? Como estamos trabajando sobre los números reales $\mathbb{R}$ podemos considerar el anillo de polinomios $R = \mathbb{R}[t]$. Las rectas móviles $A(t)x + B(t)y + C(t) = 0$ que siguen a (1) se corresponden con los elementos del subconjunto de $R^3 = \mathbb{R}[t]^3$

$$\big\{(A(t), B(t), C(t)) \in R^3 \mid A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t) \equiv 0\big\}. \tag{4}$$

Este conjunto es un R-submódulo del R-módulo libre R^3. En Álgebra Conmutativa diremos que (3) es una *sicigia* y que (4) es un *módulo de sicigias.*

A mediados de los noventa, Sederberg me preguntó si yo había visto algo parecido a (3) antes. Le dije que sí, que esa ecuación define el módulo de sicigias de la terna $(a(t), b(t), c(t))$. Como era de esperar, Tom me preguntó qué es una "sicigia". Le expliqué que en Astronomía, una sicigia hace referencia al alineamiento de tres cuerpos celestes a lo largo de, o cerca de, una línea recta. El término fue introducido en matemáticas por Sylvester en 1853 [27]. En la actualidad, una sicigia se refiere, o bien a una relación polinomial en Teoría de Invariantes, o a una relación lineal con coeficientes polinomiales, tal como en (3).

Luego Tom hizo algo inesperado: ¡me preguntó qué significa "módulo"! Inicialmente me estremecí pensando que Tom no conocía un concepto tan básico como ese, pero luego recordé que en los Estados Unidos los Ingenieros de Caminos no cursan Álgebra Abstracta (el título de Tom es en Ingeniería Civil, aunque ahora trabaja en Ciencias de la Computación). En la investigación de Tom aparecen con frecuencia los vectores de polinomios, y los módulos sobre anillos de polinomios resultan ser el lenguaje natural para entender tales objetos. Aún así, Tom nunca había oido hablar del término "módulo" hasta que yo se lo mencioné.

Con esta historia me dí cuenta de que la idea de "Álgebra Aplicada" debería ampliarse. Comentaré algo más sobre este asunto más abajo, pero primero quisiera terminar mi historia sobre las rectas móviles. Sederberg y Chen tuvieron la perspicacia de ver que cuando dos rectas móviles siguen a la parametrización (1), el punto de intersección común entre estas dos rectas describe la curva. Profundizando en esta idea, también se dieron cuenta que siempre hay dos rectas móviles

$$\begin{aligned} p &:= A_1(t)x + B_1(t)y + C_1(t) = 0 \\ q &:= A_2(t)x + B_2(t)y + C_2(t) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

que siguen a la parametrización y que tienen las siguientes propiedades especiales:

- Todas las rectas móviles que siguen a la parametrización se pueden expresar como combinaciones polinomiales de p y q, es decir, son rectas móviles de la forma $h_1p + h_2q = 0$, donde h_1 y h_2 son polinomios en t.
- Si a, b y c tienen grado n en t, entonces p tiene grado μ en t y q tiene grado $n - \mu$, donde μ es un entero que satisface $0 \leq \mu \leq \lfloor n/2 \rfloor$.
- Salvo una constante y signos apropiados, los polinomios $a(t), b(t), c(t)$ son los menores 2×2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} A_1(t) & B_1(t) & C_1(t) \\ A_2(t) & B_2(t) & C_2(t) \end{pmatrix}.$$

- La ecuación de la curva está dada por la resultante

$$\mathrm{Resultante}(p, q, t) = 0.$$

Las rectas móviles p, q de esta naturaleza especial se llaman una μ-*base*. Las μ-bases determinan tanto la parametrización (vía la tercera propiedad) como la ecuación de la curva (vía la cuarta). Para más detalles, véase [7].

Desde el punto de vista del Álgebra Conmutativa, la primer propiedad dice que el módulo de sicigias es libre, con base $(A_i(t), B_i(t), C_i(t))$, $i = 1, 2$. Para cualquiera que sepa Teoría de Módulos sobre un Dominio de Ideales Principales, esto no debería ser una sorpresa. Pero la restricción en los grados que establece la segunda propiedad es algo más peculiar: nos dice que en realidad estamos trabajando en una situación homogénea, en la que podemos reemplazar $a(t), b(t), c(t)$ por polinomios homogéneos $a(s,t), b(s,t), c(s,t)$ de grado n. Esto nos daría el ideal

$$I = \langle a(s,t), b(s,t), c(s,t) \rangle \subset S = \mathbb{R}[s,t],$$

y, como se muestra en [6, 7], las dos primeras propiedades se traducirían en la existencia de la siguiente resolución libre del ideal I:

$$0 \to S(-n+\mu) \oplus S(-2n+\mu) \xrightarrow{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}} S(-n)^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}} I \to 0 \tag{6}$$

(la notación $S(-n)$ guarda cierta información sobre el desplazamiento de los grados en los polinomios), y la tercera propiedad dice que a, b y c son los menores 2×2 de la matriz 3×2 en (6). Esta situación resulta ser un caso especial del Teorema de Hilbert-Burch (ver [6])[2].

Aunque esto puede parecer muy sofisticado, algunas ideas son sencillas de mostrar por medios más simples. Si uno toma las ecuaciones de las rectas móviles (5) y resuelve en x e y, vía la regla de Cramer, se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det\begin{pmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}} \\ y &= \frac{\det\begin{pmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}} = \frac{-\det\begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Comparando esto con la parametrización original (1) no debería sorprendernos que a, b y c sean los menores 2×2 de la matriz formada por la μ-base. Cuando Sederberg y Chen vieron esta consecuencia de la regla de Cramer, se dieron cuenta de que estaban sobre la senda correcta; Hilbert mismo habría debido llegar a esta versión del teorema de Hilbert-Burch con un razonamiento similar.

Recordad que cuando Sederberg y Chen conjeturaron esto a fines de los noventa, Sederberg no sabía lo que es un módulo. Para mí, esto sugiere que los módulos podrían tener un lugar dentro del currículo de Matemática Aplicada.

Economía, Regla de Cramer, y Álgebra Lineal Simbólica

Recientemente he tenido una conversación con un colega sobre el rol de la regla de Cramer en Álgebra Lineal. Aunque la regla de Cramer ha jugado un papel importante en el desarrollo histórico del Álgebra Lineal, parece ser menos relevante en estos días, especialmente con el énfasis en la resolución de ecuaciones lineales por eliminación gaussiana. Es más, la regla de Cramer es inutilizable cuando un sistema de ecuaciones tiene una matriz de coeficientes mal condicionada. Por estas razones, mi colega se preguntaba si el tópico no debería ser omitido–¿por qué atosigar a los estudiantes con una fórmula innecesaria? Yo siempre he apreciado la regla de Cramer por su belleza intrínseca, pero este argumento no siempre funciona con aquellos estudiantes que prefieren ver las matemáticas a través de sus aplicaciones. Después de reflexionar un poco, me di cuenta de que, aún cuando la regla de Cramer puede ser inutilizable para el Álgebra Lineal *numérica*, definitivamente tiene un lugar válido en el vasto mundo del Álgebra Lineal *aplicada*.

Para ver la diferencia, notad que el uso de la regla de Cramer en (7) es aplicado — es parte del modelado geométrico– y es no-numérico. Para otra aplicación no-numérica

[2]Este caso especial fue descubierto por Franz Meyer en 1887 [19], quien conjeturó resultados similares para el módulo de sicigias de $a_1, \ldots, a_n \in S$. Hilbert, en su trabajo fundamental de 1890 [16], creó la teoría básica de lo que hoy llamamos Álgebra Conmutativa. Su primera aplicación fue la conjetura de Meyer, que demostró vía la versión original del Teorema de Hilbert-Burch.

de la regla de Cramer, consideremos el siguiente ejemplo elemental de un modelo en Economía. El *modelo IS-LM* analiza la interacción entre el Ingreso Nacional Bruto y la Masa Monetaria, siguiendo las ideas de John Maynard Keynes. Tal como se explica en [24, pp. 115–117], se desea entender

$$\begin{aligned} Y &= \text{Ingreso Nacional Bruto} \\ r &= \text{tasa de interés} \end{aligned}$$

en términos de parámetros estratégicos (como, por ejemplo, la masa monetaria) y de comportamiento (como, por ejemplo, la propensión marginal al ahorro). Al ser linealizadas alrededor de un punto de equilibrio, el modelo IS-LM da las ecuaciones

$$\begin{aligned} sY + ar &= I^o + G \\ mY - hr &= M_s - M^o, \end{aligned}$$

donde $s, a, m, h, I^o, G, M_s, M^o$ son parámetros positivos (por ejemplos, M_s es la masa monetaria y s es la propensión marginal al ahorro). El objetivo es ver cómo varían Y y r con los parámetros. Es aquí donde la regla de Cramer aparece: provee de *fórmulas* para Y y para r que hacen tales cuestiones fáciles de responder.

La relación entre este ejemplo y (7) es que, en ambos casos, hemos aplicado la regla de Cramer a ecuaciones que dependen de *parámetros*. De esto se deduce que el Álgebra Lineal aplicada tiene aspectos tanto *numéricos* como *simbólicos*. ¿Hacen justicia a ambos aspectos nuestros actuales cursos de Álgebra Lineal? En ellos el lugar principal en el que aparece un parámetro simbólico es en la expresión $\det(A - \lambda I_n)$, para calcular el polinomio característico de una matriz A de tamaño $n \times n$. Pero, como indican los ejemplos explicados previamente, los determinantes con parámetros simbólicos tienen que jugar un rol más sustancial, aún a nivel elemental.

Esta relación se torna aún más profunda cuando pensamos sobre qué significa algebraicamente hacer Álgebra Lineal con parámetros. Por simplicidad, supongamos que los parámetros independientes $t_1, \dots, t_n$ aparecen racionalmente en las ecuaciones (es decir, que no hay ni raíces cuadradas de parámetros ni exponenciales). Como el Álgebra Lineal necesita un cuerpo, es natural trabajar entonces sobre el cuerpo de funciones racionales $K = \mathbb{R}(t_1, \dots, t_n)$. Aún así hay varias situaciones en las que los parámetros aparecen polinomialmente y la presencia de denominadores causa problemas. Esto significa que hay que hacer Álgebra Lineal sobre el anillo de polinomios $R = \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$. Aquí los "vectores" son vectores de polinomios, es decir elementos de un módulo libre sobre R. Por ejemplo, dados $a, b, c \in R = \mathbb{R}[t]$, las soluciones polinomiales $(A, B, C) \in R^3$ de la ecuación lineal $Aa + Bb + Cc = 0$ forman el módulo de sicigias (4).

Splines y Módulos

Para ver otro ejemplo de cómo el Álgebra Lineal se relaciona con los módulos, estudiaremos splines en varias variables. Consideremos la spline que se ilustra en la Figura 1. Aquí tenemos un cuadrado centrado en el origen, junto con una (curva) spline definida usando los polinomios $f_1, f_2, f_3, f_4 \in R = \mathbb{R}[x, y]$ indicados en la figura.

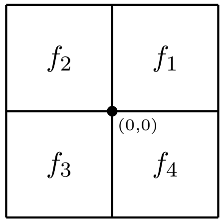

Figura 1: Una Spline polinomial

En la práctica, los grados de los polinomios se fijan previamente, pero pospondremos esto para descubrir la estructura algebraica subyacente. Para obtener una spline C^1, los polinomios deben satisfacer

$$\begin{aligned} f_1 - f_2, f_3 - f_4 &\in \langle x^2 \rangle \\ f_2 - f_3, f_1 - f_4 &\in \langle y^2 \rangle, \end{aligned} \tag{8}$$

donde $\langle x^2 \rangle$ es el ideal de $R = \mathbb{R}[x, y]$ generado por x^2, y similarmente para $\langle y^2 \rangle$. Entonces

$$\big\{(f_1, \ldots, f_4) \in R^4 \mid f_1, f_2, f_3, f_4 \text{ satisfacen } (8)\big\} \tag{9}$$

se puede ver fácilmente como un submódulo de R^4. Es más, se puede mostrar (ver el ejercicio 5 de [6, Sec. 8.3]) que este submódulo es libre de rango cuatro con base

$$(1, 1, 1, 1), \quad (0, x^2, x^2, 0), \quad (y^2, y^2, 0, 0), \quad (x^2, y^2, 0, 0).$$

En otras palabras, toda spline en (9) se puede escribir de manera única como una combinación polinomial de estas cuatro splines.

Para ver cómo se relaciona esto con el Álgebra Lineal, consideremos ahora splines C^1 de grado $\leq k$. Es inmediato reducir (8) a un sistema de ecuaciones lineales involucrando los coeficientes de f_1, f_2, f_3, f_4. Resolver estas ecuaciones con técnicas usuales proporciona un buen método para encontrar splines. Pero dado que entendemos el módulo (9), podemos responder a esta pregunta instantáneamente: los splines de grado $\leq k$ están dados únicamente por

$$g_1 \cdot (1, 1, 1, 1) + g_2 \cdot (0, x^2, x^2, 0) + g_3 \cdot (y^2, y^2, 0, 0) + g_4 \cdot (x^2, y^2, 0, 0),$$

donde g_1, g_2, g_3, g_4 tienen grados a lo más $k, k-2, k-2, k-4$, respectivamente. Dado que el espacio de polinomios en x, y de grado $\leq k$ tiene dimensión $\binom{k+2}{2}$, se sigue que el espacio de polinomios splines C^1 para la Figura 1 de grado $\leq k$ tiene dimensión

$$\binom{k+2}{2} + 2\binom{k}{2} + \binom{k-2}{2}. \tag{10}$$

Con más generalidad, en 1973 Strang [26] conjeturó una fórmula para la dimensión del espacio de polinomios splines C^r de una triangulación dada en el plano. Esto fue probado en 1988 por Billera [1] usando los métodos mencionados arriba. Una introducción a los splines desde el punto de vista de los módulos se puede encontrar en [6].

En Modelado Geométrico, la idea de fijar el grado de una recta o superficie móvil ha demostrado ser útil – ver [5] para un informe sobre el tema. En general, hay una maravillosa interacción entre trabajar con polinomios de grado fijo (estudiados vía Álgebra Lineal) y polinomios de grado arbitrario (estudiados vía módulos). Esto conduce a las nociones de *funciones de Hilbert* y *polinomios de Hilbert*. Por ejemplo, el módulo de splines (9) tiene función de Hilbert (10), que es un polinomio en k para $k \geq 2$.

Los ejemplos expuestos hasta aquí fueron elegidos para ilustrar cómo

$$\begin{aligned}\text{módulos sobre anillos de polinomios} &= \text{Álgebra Lineal con parámetros}\\ &= \text{Álgebra Lineal simbólica}\end{aligned}$$

aparece naturalmente en una variedad de contextos aplicados. Este tema también tiene un rico lado teórico que usa herramientas sofisticadas de Geometría Algebraica y de Álgebra Conmutativa, de hecho su problema central es resolver ecuaciones lineales sobre anillos de polinomios. Un manifiesto claro de esta filosofía aparece en la introducción del libro recientemente publicado por Eisenbud *The Geometry of Syzygies* [12, p. xii].

Álgebra Computacional y Álgebra Aplicada

Los últimos 40 años han sido testigos del surgimiento de una potencia computacional sustancial y del descubrimiento (en algunos casos, redescubrimiento) de algoritmos fundamentales para la computación simbólica. Estos desarrollos interrelacionados han resultado ser una fructífera fuente de investigación, tanto pura como aplicada. Los libros en esta área varían desde textos para alumnos de grado hasta monografías técnicas, algunas dirigidas a investigadores en Geometría Algebraica y Álgebra Conmutativa, otras preparadas para audiencias más diversas.

El Álgebra Computacional engloba una larga variedad de temas, incluyendo enumeración de co-clases, teoría de Galois, aritmética modular, integración simbólica, ecuaciones en diferencias, series de potencias y funciones especiales entre otros. Como es de esperarse, los polinomios juegan un rol muy importante en el Álgebra Computacional, donde se pueden encontrar algoritmos para calcular el máximo común divisor, la factorización, bases de Gröbner, resultantes, conjuntos característicos, eliminación de cuantificadores y la descomposición cilíndrica algebraica. Diversas introducciones al Álgebra Computacional aparecen en la recopilación [2] y en los textos [3, 4, 9, 13, 14, 20, 28, 29]. El Álgebra Computacional se puede usar para resolver problemas en robótica, splines, programación entera, ecuaciones diferenciales, estadística, teoría de códigos, química computacional, diseño asistido por computadoras, demostración de teoremas geométricos y sistemas de ecuaciones polinomiales. Estas y otras aplicaciones se describen en [2, 6, 8, 10, 15, 28]. Las referencias bibliográficas en estos libros revelan una vasta literatura de aplicaciones del Álgebra Computacional.

¿Como se relaciona el Álgebra Computacional con las aplicaciones del Álgebra polinomial descritas previamente en este escrito? Para aquellas partes de la comunidad de matemáticos aplicados donde las *herramientas* computacionales son de suprema importancia, los libros de Álgebra Computacional mencionados arriba pueden ser la solución (no la perfecta solución, dado que los libros no siempre hacen uso completo del lenguaje del Álgebra Abstracta, y aquellos que sí lo hacen a veces asumen demasiado o tienen una curva de aprendizaje muy empinada). Pero para muchas comunidades de matemáticos aplicados, las herramientas computacionales no son el objeto central; más bien el foco está en entender la estructura global de los problemas que están siendo estudiados. Es aquí donde el *lenguaje* del Álgebra puede ser útil. Es por esto que la Matemática Aplicada podría querer pensar sobre cómo dar a sus estudiantes un mejor acceso al Álgebra.

El Currículo de Álgebra

¿Dónde aprende Álgebra un estudiante de Matemáticas Aplicada? Esta pregunta puede tener varias respuestas:

- Algunos estudiantes aprenden Álgebra cuando estudian matemáticas en una carrera de grado.
- Algunos aprenden Álgebra en un curso de Álgebra de posgrado.
- Algunos aprenden Álgebra en cursos especializados sobre un tema de Matemática Aplicada en el que el Álgebra sea especialmente relevante.
- Algunos aprenden Álgebra más tarde, durante su carrera como investigadores.
- Algunos nunca aprenden Álgebra.

El último item refleja la realidad de que la Matemática Aplicada es una tarea inmensa. A pesar de mi creencia en el valor del Álgebra Abstracta, debo decir que no es esencial que todos los matemáticos aplicados aprendan este tema.

Para los primeros cuatro items, dejadme ofreceros algunas reflexiones sobre el rol del Álgebra en cada situación.

Virtualmente todos los alumnos de grado de la carrera de Matemáticas estudian Álgebra Abstracta. Mientras que esto parece resolver el problema para estos estudiantes, dejadme apuntar que al menos en los Estados Unidos, tales cursos raramente tratan temas tales como los módulos y, a menudo, no dicen mucho sobre anillos de polinomios en varias variables (el foco está más centrado en el caso de una variable). Más aún, la abstracción puede hacer que el curso parezca menos relevante para aquellos estudiantes cuyos intereses están puestos en las matemáticas aplicadas. Reconociendo este problema, algunos textos de Álgebra se centran en aplicaciones (ver [17] para un ejemplo reciente) y otros textos más "puros" incluyen numerosos ejemplos aplicados e incluso algunos (tales como [18, 22]) tienen secciones sobre bases de Gröbner. Pero la mayor debilidad de cualquier curso de Álgebra de grado es que muchos matemáticos aplicados tienen una formación básica en Física, Ingeniería o Investigación Operativa. Nunca han visto un curso de Álgebra.

Un curso de posgrado en Álgebra Abstracta es más probable que incluya módulos y anillos de polinomios en varias variables; libros de texto para graduados tales como [11, 21] tienen secciones sobre bases de Gröbner. Pero tal curso, ¿parece relevante para estudiantes de Matemática Aplicada? ¿O es sólo algo que se necesita para los exámenes de cualificación (*qualifying exams*)[3]? Otra complicación es que hay más Álgebra que la gente necesita saber. Por ejemplo, dada la creciente importancia de estructuras no conmutativas (como las *vertex algebras*), es preocupante el que los textos de Álgebra dediquen demasiado espacio al caso conmutativo. Así podría no haber tiempo para discutir tópicos como el de las bases de Gröbner, incluso si están en el libro. Mi intuición es que para que los cursos de Álgebra cubran las necesidades de *todos* los estudiantes, debería haber un gran énfasis en ejemplos que ilustren la utilidad del Álgebra como un *lenguaje* para describir objetos matemáticos en situaciones puras y aplicadas. Pero como he indicado arriba, el mayor problema es que los estudiantes de Matemática Aplicada acaben sin ver un curso de Álgebra a menos que estén en un departamento que incluya matemáticas puras y aplicadas. En departamentos de Matemática Aplicada, Ingeniería o Investigación Operativa es poco probable que los estudiantes encuentren un curso general en Álgebra Abstracta. Más aún, cuando los estudiantes tratan de recibir un curso de Álgebra Abstracta en un departamento de matemáticas puras, probablemente encontrarán una versión de ese curso destinado a futuros algebristas.

Una de las mejores maneras de introducir a los estudiantes al Álgebra relevante para su investigación puede ser a través de cursos especializados en temas de Matemática Aplicada. Esto funciona bien en temas de Matemática Aplicada en los cuales el uso del Álgebra tenga una utilidad clara y una tradición. Pero, ¿quién será la primer persona en enseñar tal curso? ¿Dónde habrá aprendido Álgebra esa persona? Además, si tales cursos se transforman en la fuente principal de Álgebra en la Matemática Aplicada, corremos el riesgo de limitar el alcance del uso del Álgebra.

Algunos de los usos más interesantes del Álgebra son los inesperados. Esto es parte de lo que hace la matemática tan divertida. Como ocurrió con Sederberg, los matemáticos aplicados a veces encuentran que hay Álgebra relevante en los problemas con los que están trabajando. A veces las herramientas del Álgebra resuelven el problema, mientras que otras veces el lenguaje del Álgebra clarifica los dilemas y estructuras implicadas y ayuda al investigador a focalizarse en lo que es esencial (lo cual en retorno puede generar problemas jugosos para que los algebristas exploren). Pero, ¿cómo se da cuenta el investigador de que el Álgebra es relevante en su problema? Yo veo dos caminos para que esto ocurra:

- Hablad con un matemático que sepa Álgebra. Aquí, el desafío está en el lado puro de las matemáticas: ¿están los algebristas entrenados de manera que puedan hablar con los no expertos y que la conversación tenga sentido? Dada la

[3] Una respuesta es que en los Estados Unidos, muchos matemáticos aplicados terminan trabajando en los "Colleges" donde sólo se se cubren los cuatro primeros años de los estudios universitarios. Allí enseñan una gran variedad de cursos, incluyendo a menudo los de Álgebra Abstracta.

importancia de la llamada "transferencia de tecnología" en los Estados Unidos, ¿cómo formaremos estudiantes en matemáticas puras para que sean más hábiles para comunicarse con gente que esté muy lejos de su campo de especialidad?

- Recordad algo del Álgebra aprendida previamente. Además de los cursos de Álgebra o de los cursos especializados discutidos arriba, los matemáticos aplicados podrían entrar en contacto con el Álgebra si recibieran ciertos cursos aplicados que se aprovechen de diversas oportunidades para usar el lenguaje del Álgebra. Esto podría ocurrir en cursos de Álgebra Lineal aplicada que aborden los aspectos simbólicos y numéricos del tema, o en cursos de Análisis Numérico que discutan algunos temas del libro reciente de Stetter *Numerical Polynomial Algebra* [25][4].

En muchos aspectos, todo acaba refiriéndose a la necesidad de comunicación entre matemáticos puros y aplicados. Hay ya mucha, pero se necesita más.

Las cuestions y sugerencias expuestas en este ensayo son preliminares y deberían ser tomadas "cum grano salis". Su mayor propósito es el de estimular conversaciones acerca de el rol propio del Álgebra en la Matemática Aplicada. Estoy firmemente convencido de que el Álgebra tiene un montón que ofrecer, una vez que colectivamente descubramos la mejor manera de hacer uso de este lenguaje maravilloso.

Agradecimientos

Deseo manifestar mi agradecimiento hacia D. Barbezat, E. Lamagna, J. Reyes, y T. Leise por sugerencias útiles y conversaciones. Gracias además a M.-F. Roy por su aliento y a G. Avrunin, F. Chen, R. Goldman, T. Sederberg, and B. Turkington por comentarios útiles sobre la primera versión de este escrito. Finalmente, tengo una gran deuda para con mis colaboradores en Modelado Geométrico por ayudarme a ver las consecuencias maravillosas del Álgebra que quiero tanto.

Referencias

[1] L. Billera, Homology of smooth splines: generic triangulations and a conjecture of Strang, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310** (1988), 325–340.

[2] A. M. Cohen, H. Cuypers & H. Sterk (ed.), *Some Tapas of Computer Algebra*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999.

[3] J. S. Cohen, *Computer Algebra and Symbolic Computation: Elementary Algorithms*, AK Peters, Wellesley, MA, 2002.

[4] J. S. Cohen, *Computer Algebra and Symbolic Computation: Mathematical Methods*, AK Peters, Wellesley, MA, 2003.

[4] Esto es más fácil de decir que hacer, dado que, al igual que ocurre en las matemáticas puras, hay cada día más y más cosas que los estudiantes en matemáticas aplicadas necesitan saber. Pero vale la pena pensar sobre ello.

[5] D. Cox, *Curves, Surfaces, and Syzygies*, en R. Goldman & R. Krasauskas (ed.), *Topics in Algebraic Geometry and Geometric Modeling*, Contemporary Mathematics **334**, AMS, Providence, RI, 2003, pp. 131–150.

[6] D. Cox, J. Little & D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Second Edition, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2005.

[7] D. Cox, T. Sederberg & F. Chen, The moving line ideal basis of planar rational curves, *Comput. Aided Geom. Des.* **15** (1998), 803–827.

[8] D. Cox & B. Sturmfels (ed.), *Applications of Computational Algebraic Geometry*, AMS, Providence, RI, 1998.

[9] J. H. Davenport, Y. Siret & E. Tournier, *Computer Algebra*, Second Edition, Academic Press, London, 1993.

[10] A. Dickenstein & I. Z. Emiris (ed.), *Solving Polynomial Equations: Foundations, Algorithms, and Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2005.

[11] D. Dummit and R. Foote, *Abstract Algebra*, Third Edition, John Wiley & Sons, New York, 2004.

[12] D. Eisenbud, *The Geometry of Syzygies*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2005.

[13] J. von der Gathen & J. Gerhard, *Modern Computer Algebra*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[14] K. O. Geddes, S. R. Czapor & G. Labahn, *Algorithms for Computer Algebra*, Kluwer, Dordrecht, 1992.

[15] R. Goldman & R. Krasauskas (ed.), *Topics in Algebraic Geometry and Geometric Modeling*, Contemporary Mathematics **334**, AMS, Providence, RI, 2003.

[16] D. Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Formen, *Math. Annalen* **36** (1890), 473–534.

[17] D. Joyner, R. Kreminski, and J. Turisco, *Applied Abstract Algebra*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.

[18] N. Lauritzen, *Concrete Abstract Algebra*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[19] F. Meyer, Zur Theorie der reducibeln ganzen Functionen von n Variabeln, *Math. Annalen* **30** (1887), 30–74.

[20] B. Mishra, *Algorithmic Algebra*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1993.

[21] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

[22] J. J. Rotman, *A First Course in Abstract Algebra*, Second Edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

[23] T. W. Sederberg & F. Chen, *Implicitization using moving curves and surfaces*, en *Proceedings of SIGGRAPH*, 1995, pp. 301–308.

[24] C. P. Simon & L. Blume, *Mathematics for Economists*, W. W. Norton, New York London, 1994.

[25] H. Stetter, *Numerical Polynomial Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2004.

[26] G. Strang, *The dimension of piecewise polynomial spaces, and one-sided approximation*, in *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations* (*Univ. Dundee, Dundee, 1987*), Lectures Notes in Math. **363**, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1974, 144–152.

[27] J. J. Sylvester, On a Theory of Syzygetic Relations of Two Rational Integral Functions, Comprising an Application of the Theory of Sturm's Functions, and that of the Greatest Algebraic Common Measure, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **143** (1853), 407–548.

[28] D. Wang, *Elimination Theory*, Springer-Verlag, Wien New York, 2001.

[29] F. Winkler, *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*, Springer-Verlag, Wien New York, 1996.

David Cox
Department of Mathematics and Computer Science
Amherst College, Amherst, MA 01002. USA
Correo electrónico:dac@cs.amherst.edu

Traducción al castellano de:
Carlos D'Andrea