Historia

Sección a cargo de

Jesús Hernández Alonso[1]

200 años de convergencia de las series de Fourier

por

Javier Duoandikoetxea

1. Fourier

El 21 de diciembre de 1807, Joseph Fourier, a la sazón prefecto del departamento de Isère[2], presentó al *Institut de France* una memoria titulada *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. Cuatro miembros, uno más de lo que era habitual, Lagrange, Laplace, Lacroix y Monge, fueron designados para emitir un informe, que nunca se llegó a escribir a pesar de las insistencias de Fourier, que deseaba un juicio sobre su trabajo. A cambio, el Instituto propuso como tema para el premio que se debía otorgar en 1812 «dar la teoría matemática de las leyes de propagación del calor y comparar los resultados de esta teoría con los de experiencias exactas». A finales de 1811 Fourier entregó una nueva memoria como concursante, esta vez con el título *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*. Ganó el premio, al que sólo concurrió otra obra sin ninguna posibilidad de hacerle sombra, aunque la valoración del jurado mostraba sus reservas («la manera en la que el autor llega a sus ecuaciones no está exenta de dificultades y su análisis para integrarlas deja aún algo que desear, sea respecto a la generalidad, sea incluso del lado del rigor», [13, pág. 344]), lo que tuvo como consecuencia inmediata la no publicación del trabajo.

Nacido en Auxerre en 1768, Fourier era profesor de la *École Polytechnique* cuando en 1798 fue reclutado por su colega Gaspard Monge para participar en

[1] Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: Jesús Hernández Alonso; Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid; 28049 – Madrid; Correo electrónico: `jesus.hernandez@uam.es`

[2] El departamento de Isère está en el sudeste de Francia y su capital es Grenoble. El cargo de prefecto equivale al de gobernador civil. Desde 1987 la universidad científica y médica de Grenoble lleva el nombre de *Université Joseph Fourier*.

la sección científica de la expedición de Napoleón a Egipto. Allí tuvo algunas responsabilidades administrativas, además de científicas, y a la vuelta de la expedición a Francia en 1801 sus planes de reincorporarse a la Escuela Politécnica como profesor se vieron truncados por su nombramiento de prefecto de Isère. No volvió a enseñar pero no por ello abandonó su labor científica que, además de con su labor política, tuvo que compaginar con la coordinación de la edición de la *Description de l'Égypte*, la gran obra que recogía los estudios de la expedición napoleónica. Él mismo fue el autor de su *Prefacio histórico* (1809). Conservó su puesto de prefecto durante la primera restauración monárquica de 1814, fue depuesto a la vuelta de Napoleón de Elba en 1815, pasó a ser nombrado prefecto del departamento de Rhône y perdió el cargo un par de meses después por discrepancias con las exigencias de Napoleón. En 1815, poco antes de la segunda restauración monárquica, se trasladó a París donde comenzó su carrera política en el campo científico.

Intentó ser miembro de la *Académie des Sciences*[3] y fue elegido por primera vez en 1816, pero Luis XVIII rechazó su nombramiento por su pasado napoleónico. La segunda vez optó a un puesto en la sección de Física, lo ganó ampliamente y fue aceptado. Era en 1817, lo que ha quedado recogido en el tercer capítulo de la obra *Les Misérables* de Victor Hugo:

> Había en la Academia de Ciencias un Fourier célebre a quien la posteridad ha olvidado y en no se qué desván un Fourier oscuro de quien el futuro se acordará[4].

A partir de su nombramiento puso especial empeño en que se publicase su trabajo premiado de 1812, lo que consiguió en dos partes aparecidas en 1824 y 1826, aunque datadas en fecha anterior. Mientras tanto, había publicado en 1822 su libro *Théorie analytique de la chaleur*, que el físico Arnold Sommerfeld calificó como «Biblia de la Física Matemática» (en el prólogo de [62])[5]. Ese mismo año fue nombrado Secretario Perpetuo de la Academia de Ciencias y en 1826 fue elegido miembro de la Academia Francesa. Murió en París en 1830. (Una biografía muy completa de Fourier con abundante documentación es [13].)

[3]La *Académie royale* nacida a finales del siglo XVII fue suprimida en 1793. Dos años después se creó el *Institut national des sciences et des arts* que reagrupaba a las antiguas academias científica, literaria y artística. En 1816 las secciones (*classes*) del Instituto volvieron a llamarse *academias*. Así, la *première classe* (Ciencias físicas y matemáticas), la más numerosa, se convirtió en *Académie des sciences*.

[4]El «Fourier oscuro» es Charles Fourier, filósofo, fundador de la Escuela societaria, considerado «socialista utópico». Sobre el olvido de «nuestro» Fourier que anuncia Victor Hugo, véase el artículo de Jean-Pierre Kahane en este número de La Gaceta.

[5]Más elogios al trabajo de Fourier debidos a Lord Kelvin, Darboux, Poincaré y Boussinesq aparecen en [10, pág. 7].

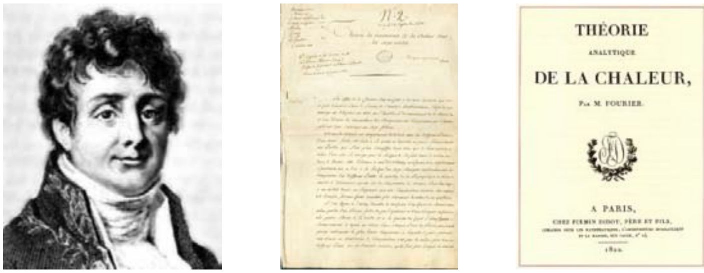

Figura 1: Joseph Fourier (1768–1830), primera página de su memoria de 1811 y portada de la *Théorie analytique de la chaleur* (1822).

2 . El problema

La memoria de Fourier de 1807 permaneció inédita hasta la publicación de [29], donde se hace un estudio de su contenido. Aunque desarrollados en sus trabajos posteriores, casi todos los elementos destacados de su aportación científica se encuentran ya en esa primera memoria y sólo la propagación del calor en un cuerpo infinito, que conduce a lo que llamamos integrales de Fourier, se echa en falta. En [28] se puede ver una tabla comparativa de los temas tratados en las dos memorias y el libro de Fourier.

En sus tres obras Fourier comienza deduciendo la ecuación que gobierna la difusión del calor. Después resuelve el problema de la distribución de temperatura en un tiempo dado a partir de la distribución en el instante inicial, en varios casos. Para ello inventa el método de separación de variables, también conocido como método de Fourier. Para escribir la solución necesita escribir la función que da el dato inicial como suma de una serie trigonométrica. Éste es precisamente el aspecto del trabajo de Fourier del que nos vamos a ocupar aquí, dejando a un lado otros méritos.

Aunque se presenta de varias maneras según el tipo de problema estudiado, en el caso general y para una función de periodo 2π el problema consiste en, dada una función f, encontrar un serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

cuya suma coincida con $f(x)$ para cada x. En primer lugar Fourier decidió que los coeficientes debían venir dados por las fórmulas

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx\,. \tag{2}$$

(El factor $1/2$ del primer sumando de (1) se pone para que la fórmula de a_0 sea la misma que la de los demás a_k.) La manera en que Fourier dedujo esta fórmula es cuando menos curiosa[6], utilizando sistemas lineales de infinitas ecuaciones, pero también presentó en el libro el argumento habitual de ortogonalidad. Véase [8], además de la obra original [26]. La serie trigonométrica (1) en la que los coeficientes se eligen según las fórmulas (2) se llama *serie de Fourier* de f. Escribiremos $S_N f$ la suma parcial de la serie de Fourier de f correspondiente a los términos desde $k = 0$ hasta $k = N$.

Tras considerar varios ejemplos Fourier afirma ([26, pág. 259]):

> Las series ordenadas según los cosenos y los senos de arcos múltiplos son siempre convergentes, es decir, que dando a la variable un valor cualquiera no imaginario, la suma de los términos converge cada vez más hacia un único límite fijo, que es el valor de la función desarrollada.

Puede uno preguntarse a qué tipo de funciones pretende Fourier aplicar sus desarrollos trigonométricos. Podemos leer en [26, pág. 552]:

> En general, la función $f\,x$ representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitraria. Como la abscisa x puede recibir una infinidad de valores, hay un número igual de ordenadas $f\,x$. Todas tienen valores numéricos concretos, sean positivos, negativos o nulos. No se supone que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se suceden de cualquier manera, y cada una de ellas se da como si fuese una sola cantidad.

Tomada literalmente, ésta es una definición moderna de función. Sin embargo, en la práctica Fourier siempre considera propiedades más restrictivas de las funciones, incluso su representación en serie de Taylor. Nunca dudó de la posibilidad de definir los coeficientes ya que «los coeficientes de las series trigonométricas son áreas definidas» ([26, pág. 259]). Fourier está dando por sentado que siempre hay un área bien definida entre la gráfica de una función y el eje de abscisas.

En cuanto a la convergencia, indica que no le parece necesario demostrarla, que es fácil ([26, pág. 247]). A continuación podemos leer lo siguiente:

> Esto no resulta solamente de que los valores de los términos disminuyen continuamente; pues esta condición por sí sola no basta para establecer la convergencia de una serie. Es necesario que los valores a los que se llega aumentando continuamente el número de términos se acerquen cada vez más a un límite fijo y no se separen de éste más que en una cantidad que puede hacerse menor que toda magnitud dada: este límite es el valor de la serie. Pues bien, se demuestra rigurosamente que las sucesiones de las que se trata satisfacen esta última condición.

---

[6] Lebesgue comenta en [49, pág. 29] que aunque el método no es riguroso, «es interesante sobre todo por la ingeniosidad de las transformaciones que efectúa Fourier».

Aunque sin la precisión formal de la definición de Cauchy, el concepto de convergencia de una serie parece estar bien establecido en Fourier.

A falta de demostraciones generales de sus resultados, lo que Fourier nos legó no fue un teorema sobre la representación de una función en serie trigonométrica, sino un problema. Un problema en el que estaban implicados los conceptos de función, integral, suma de series y, posteriormente, tipo de convergencia. La influencia de este problema en el desarrollo de los conceptos del análisis matemático fue considerable.

Si situamos en los trabajos de Fourier la historia del problema, entonces hay que decir que existe una prehistoria que comenzó unos sesenta años antes con la discusión del problema de la cuerda vibrante por d'Alembert, Euler y Daniel Bernouilli, y aportaciones posteriores de Lagrange y Clairaut. No vamos a entrar en esta cuestión en la que tuvieron más que ver las diferentes concepciones de función que la determinación de la serie y su convergencia (véanse, por ejemplo, [38, cap. 22] o la introducción de [56]). Que Fourier no veía la función sujeta a una (sola) fórmula como podía pensarse en el siglo XVIII se puede ver en su afirmación de que distintas series pueden dar la misma función ([26, pág. 258]):

> Si se nos propone una función $f\,x$, cuyo valor viene representado en un intervalo determinado, desde $x = 0$ hasta $x = X$, por la ordenada de una línea curva trazada arbitrariamente se podrá siempre desarrollar esta función en una serie que no contendrá más que los senos, o los cosenos, o los senos y cosenos de arcos múltiplos, o sólo los cosenos de los múltiplos impares.

Incluso la fórmula de los coeficientes de Fourier aparece en alguna manera en trabajos precedentes, como se puede leer en la documentada información de [49].

3 . Dirichlet y los criterios de convergencia

Una vez planteado el problema de la representación de funciones por series trigonométricas, los intentos de probar la convergencia de la serie de Fourier aparecieron inmediatamente. Poisson y Cauchy publicaron sendas pruebas incorrectas, aunque sobre la de Poisson volveremos en la sección 6. Fue Dirichlet[7] quien en 1829 inauguró una nueva época ya que publicó el primer resultado correcto de convergencia ([15]):

> Si la función $\varphi(x)$, cuyos valores se suponen finitos y determinados, no presenta más que un número finito de soluciones de

[7]Dirichlet, cuya familia era de origen francés, se trasladó a París en 1822, con tan sólo 17 años, para estudiar matemáticas. Allí entró en contacto con destacados matemáticos, Fourier entre ellos. Volvió a Alemania en 1825 y fue uno de los responsables de que la matemática alemana ocupase el primer lugar mundial durante casi un siglo.

> continuidad entre los límites $-\pi$ y π, y si además no tiene más que un número determinado de máximos y mínimos entre esos mismos límites, la serie [de Fourier] cuyos coeficientes son integrales definidas dependientes de la función $\varphi(x)$ es convergente a un valor expresado generalmente por $\frac{1}{2}[\varphi(x+\epsilon)+\varphi(x-\epsilon)]$, donde ϵ designa un número infinitamente pequeño.

Es decir, si una función acotada es continua a trozos y monótona a trozos, su serie de Fourier converge en cada punto a la semisuma de los límites laterales de la función.

El artículo de Dirichlet comienza indicando las razones por las que la prueba de Cauchy no era válida. Después estudia las integrales —hoy llamadas de Dirichlet—,

$$\int_a^b g(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt \tag{3}$$

con $0 \leq a < b \leq \pi/2$ y g monótona. Deduce que cuando k tiende a infinito convergen a cero, excepto cuando $a = 0$, en cuyo caso convergen a $g(0+)$. El estudio de esas integrales está motivado por la representación integral de la suma parcial

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin(N+1/2)t}{\sin t/2}dt,$$

donde reconocemos la presencia de lo que hoy llamamos *núcleo de Dirichlet*. El resultado de convergencia se obtiene aplicando el resultado probado para las integrales (3).

La demostración original es estrictamente rigurosa y se lee sin dificultad, aunque hoy es habitual presentarla en forma diferente (por ejemplo, con el segundo teorema del valor medio para integrales). La continuidad a trozos de las funciones no se usa en realidad en ningún lugar de la prueba, pero incorporándola Dirichlet se asegura de que las integrales que dan los coeficientes de Fourier están bien definidas. En efecto, le sirve la definición de Cauchy para la integral, que data de 1823. Al final de su artículo Dirichlet sugirió una condición más amplia de integrabilidad que podría aceptar un número infinito de discontinuidades y mostró las dificultades para extenderla a «todas» las funciones:

> Tenemos un ejemplo de una función que no cumple esta condición [de integrabilidad] si suponemos $\varphi(x)$ igual a una constante determinada c cuando la variable x tiene un valor racional e igual a otra constante d cuando esta variable es irracional. La función así definida tiene valores finitos y determinados para todo valor de x y, sin embargo, no se puede sustituir en la serie [de Fourier], puesto que las diferentes integrales que entran en esta serie perderían todo su sentido en este caso.

Aquí la referencia a la pérdida de sentido la podemos entender no sólo como la imposibilidad de usar la definición de Cauchy —la función ni siquiera será integrable en el sentido de Riemann—, sino que incluso la afirmación de Fourier de que los coeficientes son «áreas definidas» queda en entredicho.

Además de por el interés de su resultado, el trabajo de Dirichlet vino a clarificar los términos en que se planteaba el problema. Por una parte, no podemos hablar de coeficientes de Fourier más que para las funciones para las que las integrales que aparecen en las fórmulas tienen sentido. Por otra, Dirichlet comprendió que no había que buscar un resultado tan general como Fourier sugería, sino condiciones suficientes que asegurasen la convergencia de la serie. Inauguró así los *criterios de convergencia*. En un trabajo posterior ([16]) amplió su resultado al caso de funciones no acotadas, con la condición añadida de que sean absolutamente integrables.

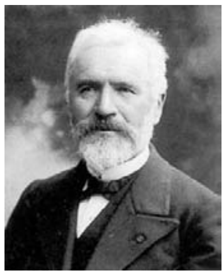

Figura 2: Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1802–1856) y Camille Jordan (1838–1922).

En 1881 Camille Jordan extendió el criterio de Dirichlet a las funciones de variación acotada ([33]). Probó que toda función de variación acotada se puede escribir como diferencia de dos funciones crecientes, por lo que se limitó a señalar que «la demostración de Dirichlet es aplicable, sin modificación». El concepto de función de variación acotada nació precisamente en ese trabajo de Jordan[8]. Indicó que «las funciones de oscilación limitada forman una clase bien definida, cuyo estudio podría presentar algún interés» y mostró algunas de sus propiedades. En particular, la posibilidad de que una función de variación acotada tenga una cantidad infinita de discontinuidades en cualquier intervalo, lo que le sirvió para mostrar que una posible condición necesaria y suficiente de integrabilidad que Dirichlet sugería al final de su artículo no era necesaria. Como es bien sabido, las funciones de variación acotada han tenido muchas otras aplicaciones en análisis matemático.

[8]Jordan usó en [33] el término *fonction à oscillation limitée*, en la primera edición de su *Cours d'Analyse* lo cambió por el de *fonction à variation limitée*, y en la segunda edición por el de *fonction à variation bornée*, que fue el adoptado finalmente.

Un criterio de convergencia sencillo de aplicar se debe a Rudolph Lipschitz[9]. Éste mostró en su tesis que si la función f satisface

$$|f(x+t) - f(x)| \leq C|t|^{\alpha}$$

para algún $\alpha > 0$ y todo t suficientemente pequeño, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ en el punto x. Se reconoce inmediatamente que la condición sobre la función es lo que llamamos una condición de Lipschitz (aunque a veces este nombre se reserva para el caso $\alpha = 1$ y se llama condición de Hölder al caso general). Es fácil dar una prueba del resultado de Lipschitz utilizando la representación de Dirichlet y el lema de Riemann-Lebesgue (que mencionaremos en la siguiente sección). Pero la prueba original de Lipschitz no es tan sencilla; él no disponía del lema, debido al retraso en la publicación del trabajo de Riemann y, a cambio, su prueba pasaba por el criterio de Dirichlet.

Exactamente con los mismos medios —núcleo de Dirichlet y lema de Riemann-Lebesgue— se puede probar con facilidad el criterio de Dini, que engloba al de Lipschitz ([14, pág. 114]). Dice que si la función $|f(x+t) - f(x)|/t$ es integrable en un entorno de cero, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$. Se pueden introducir variantes adecuadas, tanto en el criterio de Lipschitz como en el de Dini, para cubrir los casos en que la función no sea continua.


Figura 3: Rudolph Lipschitz (1832–1903) y Ulisse Dini (1845–1918).

Los criterios de Dirichlet-Jordan y de Lipschitz-Dini son los habituales en los libros. A veces se suelen presentar otros de principios del siglo XX, debidos a Lebesgue, de la Vallée-Poussin y Young. En [6, cap. III] aparecen todos ellos comparados entre sí; véanse también [31], [64] o [65].

[9]Curiosamente el artículo en que Lipschitz publicó sus resultados ([50]) está escrito en latín, lo que en 1864 ya no era habitual (el artículo anterior del mismo número de la revista también es de Lipschitz y está en alemán). En 1913 se publicó en *Acta Mathematica* una traducción al francés de Paul Montel.

4 . Riemann

Es casi imposible pasar por un tema importante de las matemáticas del siglo XIX sin mencionar a Riemann. Continuador de la obra de Dirichlet, Riemann presentó en 1855 su trabajo escrito de habilitación titulado *Sobre la representabilidad de una función en serie trigonométrica* ([56], un amplio extracto en castellano aparece en [24]) que, sin duda, es uno de los varios con los que su autor merece pasar a la historia de las matemáticas. No fue publicado hasta 1867, un año después de su muerte. En el trabajo se distinguen tres partes: comienza con un recorrido histórico, sigue con la generalización de la integral de Cauchy y finalmente se ocupa de las propiedades de las sumas de series trigonométricas. Un análisis de la memoria de Riemann se puede leer en [52].

La parte histórica es un excelente repaso a la situación del problema a lo largo de los cien años anteriores y la divide en tres secciones: de Euler a Fourier, de Fourier a Dirichlet y desde Dirichlet. Termina diciendo ([24, pág. 52]):

> La cuestión de la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica sólo ha sido resuelta hasta ahora bajo los dos supuestos de que la función admita integración en todo el recorrido, y que no posea infinitos máximos y mínimos. Si no se hace la última presuposición, entonces los dos teoremas integrales de Dirichlet son insuficientes para decidir la cuestión; mas si se suprime la primera, ya no es aplicable la propia determinación de los coeficientes de Fourier.

Un poco antes ha indicado que todas las funciones que intervienen en los fenómenos naturales caen bajo el teorema de Dirichlet pero que la extensión del concepto de integral merece la pena por dos motivos:

> En primer lugar, como Dirichlet mismo señala al final de su memoria, este asunto está en la más estrecha conexión con los principios del cálculo infinitesimal, y puede servir para traer dichos principios a una mayor claridad y precisión. En este sentido su consideración tiene un interés inmediato.
>
> Mas, en segundo lugar, la aplicabilidad de las series de Fourier no se limita a investigaciones físicas; hoy se han aplicado con éxito también a un campo de la matemática pura, la teoría de números, y aquí parecen ser de importancia precisamente aquellas funciones cuya representabilidad mediante series trigonométricas no ha investigado Dirichlet.

Descrita la necesidad de extender la noción de integral, a ello dedica la continuación de su memoria. Su integral modifica ligeramente la definición de Cauchy, pero a diferencia de éste, que sólo se ocupa de funciones continuas (a trozos), Riemann se interesa por el estudio de la clase máxima de funciones a las que se puede aplicar, las funciones integrables (*integrables Riemann* diríamos hoy). Fue capaz de dar una caracterización en términos de la oscilación y, con ello, de construir funciones integrables con un conjunto denso de discontinuidades.

En la parte final de la memoria aborda el estudio de las series trigonométricas. Al fijar los coeficientes de éstas por la fórmula de Fourier estamos dejando fuera la posibilidad de representar una función por otra serie trigonométrica que no sea la de Fourier. Riemann pretende recuperar esta posibilidad y busca propiedades de las sumas de series trigonométricas generales, es decir, condiciones necesarias para que una función sea representable.

> Para nuestros fines, el recorrido [de la función] sólo se debe someter a las condiciones necesarias para la representabilidad de la función; por ello, se deberían buscar, en primer lugar, condiciones necesarias para la representabilidad, y a continuación elegir entre ellas las suficientes para la representabilidad. Por tanto, mientras los trabajos anteriores mostraron que si una función tiene esta y aquella propiedad, entonces es representable mediante la serie de Fourier; nosotros deberemos partir de la pregunta inversa: si una función es representable mediante una serie trigonométrica, ¿qué se deduce de ello acerca de su recorrido, acerca de la variación de su valor al variar continuamente su argumento? ([24, pág. 58]).

Riemann observó que si los coeficientes de una serie trigonométrica tienden a cero, la serie integrada término a término dos veces es uniformemente convergente. Habría que derivar dos veces la función así obtenida para dar la suma de la serie y para ello introduce una especie de derivada generalizada. En realidad, estaba inventando un método de sumabilidad. Los teoremas de Riemann están en la base de los estudios de Cantor sobre la unicidad de series trigonométricas ([12]). Con respecto a las series de Fourier aparecen dos resultados importantes:

1. *Los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero* (lema de Riemann-Lebesgue).

2. *La convergencia o divergencia de la serie de Fourier en un punto sólo depende de los valores de la función en un entorno del punto* (principio de localización).

5 . Funciones continuas, convergencia uniforme y divergencia

Cauchy había escrito en su *Cours d'Analyse* que el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua (lo que implicaría de paso que sólo las funciones continuas son representables por series trigonométricas).

Figura 4: Bernhard Riemann (1826–1866) y Eduard Heine (1821–1881).

Ante la evidencia de que no era cierto, la necesidad de «corregirlo» condujo al concepto de convergencia uniforme. Parece que Weierstrass ya lo había tenido en cuenta desde 1842 y que lo había recogido de su maestro Gudermann; desde luego fue un concepto común en sus cursos de Berlín ([17] y [27, sec. 3.12]). Las primeras publicaciones en que aparece se deben a Seidel y Stokes y son de 1847.

En 1870 Heine publicó un trabajo ([30]) que comenzaba indicando cómo Weierstrass había demostrado que la convergencia uniforme permitía integrar término a término una serie de funciones, lo que sin esa condición podía ser falso. Por tanto, no estaba justificado que si una serie trigonométrica representaba a una función, sus coeficientes tuvieran que ser los dados por la fórmula de Fourier. Incluso, señalaba Heine, los criterios de convergencia sólo decían que la serie de Fourier convergía a la función, pero no que no pudiese haber otras series trigonométricas con la misma suma. Esto conduce inmediatamente a la cuestión de la unicidad: ¿pueden dos series trigonométricas distintas tener la misma suma? Cantor estudió este problema por influencia de Heine y sus investigaciones le condujeron al estudio de subconjuntos de la recta real con implicaciones en la futura teoría de conjuntos y en los conceptos topológicos. Un análisis de los trabajos de Cantor y sus implicaciones posteriores aparece en [12].

Otra cuestión sugerida por el planteamiento de Heine era la de determinar condiciones para la convergencia uniforme y a ello dedicó su artículo. Su teorema principal probaba que la serie de Fourier de una función continua con un número finito de máximos y mínimos (condiciones de Dirichlet) converge uniformemente[10]. Y señalaba que «todavía no se sabe si una serie que representa a una función continua tiene que converger uniformemente, lo que es implícitamente aceptado».

[10]Fatou hizo notar que toda condición de convergencia puntual se puede transformar en una condición de convergencia uniforme en un intervalo con los cambios adecuados ([49, pág. 62]).

A pesar de esa convicción general que Heine sugería, la sorpresa no tardó en llegar. En 1873, sólo tres años después de la publicación del artículo de Heine, Paul du Bois-Reymond anunció un contraejemplo ([7]) que mostraba que la serie de Fourier de una función continua puede ser divergente en un punto. No sólo no era uniformemente convergente, ni siquiera puntualmente. Una vez conocido el resultado fueron apareciendo otras construcciones para el contraejemplo, debidas a Schwarz, Lebesgue y Fejér. La de Lebesgue se puede ver en [49], la de Fejér de [22] se reproduce en [65]. Hoy es habitual presentar el resultado en forma no constructiva utilizando el principio de acotación uniforme, que aparecerá de nuevo en la sección 9.

 

Figura 5: Paul du Bois-Reymond (1831–1889) y Lipot Fejér (1880–1959).

6 . Fejér y la sumabilidad

Una solución al problema de representación de funciones continuas creado por el resultado de du Bois-Reymond vino de cambiar la manera de sumar la serie. En 1900, Fejér publicó un trabajo ([21]) en el que mostraba que la función continua se recupera siempre, y con convergencia uniforme, si antes de pasar al límite se toman los promedios de las sumas parciales. Es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_0 f(x) + S_1 f(x) + \cdots + S_N f(x)}{N+1} = f(x) \quad \text{uniformemente,}$$

si f es continua.

El resultado de Fejér permite recuperar una función a partir de sus coeficientes de Fourier. Pero también el método de las sumas de Poisson. Precisamente la «falsa prueba» de Poisson que mencionamos en la sección 3 intentaba ver que

$$\lim_{r\to 1-} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x). \tag{4}$$

Este resultado no valdría para probar la convergencia de la serie, como Poisson pretendía, pero sí como un método de recuperar la función a partir de sus coeficientes de Fourier. Y aunque la prueba de Poisson no fuese completa, sí lo era la que en 1872 había publicado H. A. Schwarz para funciones continuas en su trabajo sobre el problema de Dirichlet en un círculo ([61]). Podemos preguntarnos por qué se dio más importancia al resultado de Fejér. Una posible explicación que se ha avanzado es que el método de Poisson no utiliza la serie de Fourier, sino sus coeficientes, mientras que Fejér recupera la función a partir de las sumas parciales. Plancherel hace notar en [54] que el método de Fejér necesita un solo paso al límite y el de Poisson dos (precisamente el cambio de orden de estos dos pasos es crucial).

Al final de su artículo, Fejér indica que a partir de su teorema «se puede dar una teoría general y nueva de la integral de Poisson», que él no veía como sumabilidad de la serie de Fourier sino como solución del problema de Dirichlet. Puesto que Frobenius había probado que si s_k son las sumas parciales de la serie $\sum a_k$ se tiene

$$\lim_{r\to 1-}\sum_{k=1}^{\infty} r^k a_k = \lim_{N\to\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots+s_N}{N}, \tag{5}$$

siempre que el segundo miembro exista, esta aplicación al problema de Dirichlet pudo ser la causa del interés de Fejér en el estudio de las medias aritméticas; en su artículo, sin embargo, da la mayor relevancia al resultado para series de Fourier y la mención a la integral de Poisson queda reducida al comentario mencionado. Sobre el trabajo de Fejér y su importancia véase [34].

Las críticas de Cauchy y Abel habían dejado en mal lugar la manipulación de series divergentes, que de uno u otro modo existía desde el siglo XVII. En la última parte del siglo XIX ya hay intentos serios de formalizar métodos de sumabilidad y en 1901 encontramos uno de los grandes libros sobre el tema, *Leçons sur les séries divergentes* de E. Borel. El resultado de Fejér vino a reforzar el interés por las series divergentes, ya que ahora había algo con lo que comparar la suma asignada, la función original. En el artículo [63] se presenta el desarrollo histórico de la teoría de series divergentes y se incluye la prueba original de Frobenius de (5).

7 . El problema renace

Aparentemente el siglo XIX se cerraba con respuestas satisfactorias para las series de Fourier. Se tenían varios criterios de convergencia, se sabía que las funciones continuas podían tener series de Fourier divergentes, se recuperaba la función original si se utilizaban métodos de sumabilidad para la serie. En 1924 Michel Plancherel escribió un informe sobre el desarrollo de la teoría de las series trigonométricas durante el último cuarto de siglo, es decir, el primer cuarto del siglo XX ([54]). Inmediatamente se observa que, lejos de haberse terminado, el problema siguió siendo un campo de gran actividad: el artículo de Plancherel trae más de 200 referencias, casi todas posteriores a

1900. Las razones —cualquiera que conozca la historia del análisis matemático las intuye— fueron el nacimiento de la teoría de la medida e integración de Lebesgue y del análisis funcional.

La tesis de Lebesgue con la que nace su teoría de integración apareció en 1902. La nueva teoría trajo más funciones integrables, pero no sólo eso: la identificación de funciones que coinciden en casi todo punto sugiere una nueva manera de comparar la suma de la serie y la función de partida, podrían no coincidir en todos los puntos pero de modo que la discrepancia sea sólo en un conjunto «pequeño», es decir, de medida nula. Pregunta que se abría incluso para funciones continuas.

El propio Lebesgue estudió las series de Fourier con la nueva herramienta. En un trabajo de 1903 ([48]) escribió: «voy a aplicar la noción de integral al estudio del desarrollo trigonométrico de las funciones no integrables en el sentido de Riemann». Además de extender resultados previos al nuevo contexto, dio un ejemplo de función integrable con su definición, pero no con la de Riemann, que tenía serie de Fourier convergente. Durante el curso 1904-05 impartió un curso sobre series trigonométricas en el Collège de France, del que surgió su libro *Leçons sur les séries trigonométriques* ([49]) publicado en 1906.

Algunos de los resultados de Lebesgue son los siguientes:

1. *Los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero* (lema de Riemann-Lebesgue).

2. *Si una serie trigonométrica converge a una función integrable acotada, es la serie de Fourier de su suma.*

3. *Si f es integrable, los promedios de las sumas parciales de su serie de Fourier convergen a f en casi todo punto.*

4. *La serie que resulta al integrar término a término una serie de Fourier siempre es convergente y su suma es una primitiva de la función original.*

Una vez probado el lema de Riemann-Lebesgue, tanto el principio de localización como el criterio de convergencia de Dini, por ejemplo, se extienden inmediatamente a la nueva clase de funciones integrables. El resultado de sumabilidad nos dice que siempre se recupera la función de partida (en casi todo punto, como no podía ser de otra manera) con el método de Fejér. El resultado de integración término a término junto con el teorema de derivación de integrales del propio Lebesgue tiene como consecuencia un método para recuperar la función original a partir de sus coeficientes de Fourier; en efecto, en casi todo punto se cumple

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k}.$$

Fatou observó que hay series trigonométricas convergentes que no son series de Fourier (la suma no es integrable en el sentido de Lebesgue), por ejemplo,

$\sum_k \sin kx/\log k$ ([49, pág. 124]). Si fuese una serie de Fourier, al integrarla término a término y evaluar en $x = 0$ deduciríamos que $\sum_k 1/(k \log k)$ es convergente, lo que es falso.

 

Figura 6: Henry Lebesgue (1875–1941) y Frygies Riesz (1880–1956).

8 . Sistemas ortogonales y teoría L^2

En los primeros años del siglo XX se desarrollaron los conceptos que condujeron a la teoría de los espacios de Hilbert, nombre popularizado años después. Partiendo de trabajos previos sobre ecuaciones integrales de Volterra, Fredholm y otros, D. Hilbert y su alumno E. Schmidt se encontraron con valores propios y funciones propias, propiedades de ortogonalidad, sistemas lineales de infinitas ecuaciones, etc., y desarrollaron los conceptos asociados a los espacios de sucesiones l^2. Junto con las ideas que Fréchet esbozaba en su tesis de 1906 sobre espacios métricos, Riesz elaboró la noción de distancia en los espacios de funciones L^2 y poco después llegaron los teoremas que permitían la identificación de funciones de cuadrado integrable con sucesiones de l^2.

Fatou demostró en [20] que la igualdad de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

se cumple sin más hipótesis que $f \in L^2$. Para entonces ya se conocía en condiciones más restrictivas sobre la función (ver referencias en [37, pág. 100]) y debe su nombre a un resultado de Parseval de 1799, publicado en 1806 –anterior, por tanto, a la primera memoria de Fourier–, en que se probaba de manera formal.

El resultado recíproco, que completó el panorama, es debido independientemente a Frigyes Riesz y a Ernst Fischer en sendas notas en los *Comptes Rendus* de 1907 ([57], [25]). Ambos lo enuncian para sistemas ortogonales de funciones, no exclusivamente para el sistema trigonométrico. Por ejemplo, la versión de Fischer es (adaptando algo los términos): *sea $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ un conjunto numerable de funciones de $L^2(a,b)$, que forma un sistema ortonormal. Si la serie de términos constantes no negativos $a_1^2+a_2^2+\cdots$ converge, $a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\cdots$ convergerá en media cuadrática a una función φ definida en casi todo punto y tal que $a_k=\int_a^b \varphi\varphi_k$.*

Fischer prueba primero la completitud de L^2: las sucesiones de Cauchy convergen en la norma de L^2. Una vez probado esto, puesto que de las hipótesis sobre $\{a_k\}$ y $\{\varphi_k\}$ se deduce inmediatamente que las sumas parciales de $\sum_k a_k\varphi_k$ forman una sucesión de Cauchy, se obtiene su resultado. La prueba de Riesz comienza con el sistema trigonométrico y extiende después el resultado a una familia ortonormal cualquiera a través de un sistema lineal de infinitas ecuaciones. Una consecuencia inmediata del teorema de Riesz-Fischer es la convergencia en norma cuadrática de la serie de Fourier: $\lim_{N\to\infty}\|S_Nf-f\|_2=0$.

La identificación del espacio de funciones L^2 con el de sucesiones l^2 fue un resultado clave en la construcción de la teoría de los espacios de Hilbert. Años después Riesz señaló como uno de los grandes éxitos de la integral de Lebesgue el hecho de que L^2 se construya sobre ella. El sistema trigonométrico se convirtió en un ejemplo modelo de base ortogonal y las series de Fourier de funciones de L^2 resultaron ser desarrollos en esa base ortogonal.

9 . CONVERGENCIA EN L^p

La convergencia en L^2 de la serie de Fourier sugería el estudio del problema análogo en los espacios L^p: ¿es $\lim_{N\to\infty}\|S_Nf-f\|_p=0$ para $f\in L^p$ si p es distinto de 2? Para p finito, por supuesto, ya que si $p=\infty$ la convergencia sería uniforme y el límite debería ser una función continua (y ya sabemos que ni siquiera eso es suficiente).

La primera respuesta vino en sentido negativo: Banach y Steinhaus probaron en 1918 que no hay convergencia en media, es decir, en L^1 ([4]). Los nombres de los autores evocan el principio de acotación uniforme, que ciertamente está relacionado con su resultado. Pero en su forma abstracta el principio de acotación uniforme apareció por primera vez unos años más tarde ([5]), y en ese artículo Banach y Steinhaus mencionan la no convergencia en la norma de L^1 como una de sus aplicaciones.

Fue Marcel Riesz[11] quien consiguió demostrar en 1923 que la respuesta a la convergencia en norma es afirmativa si $1<p<\infty$. Se suele citar a menudo la fecha de 1927, que corresponde a su artículo [59], pero ya antes había anunciado el resultado en [58], una nota publicada en los *Comptes Rendus* de 1924. Riesz no trabajó directamente con las sumas parciales, sino con la función conjugada,

[11] Marcel Riesz, hermano menor de Frigyes Riesz, nació en Hungría en 1886 y allí realizó su tesis doctoral. A instancias de Mittag-Leffler se trasladó a Suecia en 1911 donde fue profesor en Estocolmo y Lund hasta su retiro. Así que tanto la convergencia en norma como la puntual de series de Fourier acabaron siendo «productos suecos».

concepto que proviene del análisis complejo a través de la armónica conjugada de la solución del problema de Dirichlet en el círculo. Para una función f cuya serie trigonométrica viene dada por (1), su función conjugada, $\tilde{f}$, es la que tiene como serie asociada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx).$$

Está claro por los resultados mencionados en la sección anterior que si f está en L^2, también lo está $\tilde{f}$ y recíprocamente. Riesz probó que lo mismo ocurre en L^p si $1 < p < \infty$.

Es interesante leer la correspondencia que mantuvo con Hardy a propósito de este resultado ([11]). En junio de 1923 Riesz comunicó a Hardy que había demostrado que «dos series trigonométricas conjugadas son siempre simultáneamente series de Fourier de funciones de la clase L^p $(p > 1)$». Inmediatamente Hardy contestó diciendo que estaba muy interesado en el resultado y quería ver la prueba. Varios meses después Hardy, que no había recibido la prueba de Riesz, insistió con un imperativo «I want the proof», al que seguía una explicación: «Tanto yo como mi alumno Titchsmarsh hemos intentado en vano probarlo. (...) Ya no merece la pena si usted lo ha conseguido. Pero como T. está ocupado en las cuestiones correspondientes sobre integrales, es vital para él tener la prueba de este teorema tan fundamental».

Por fin, en diciembre de 1923, Riesz escribió todos los detalles de la prueba en una carta a Hardy. La prueba se divide en tres partes: (i) si el exponente es par; (ii) si el exponente no es entero; (iii) si el exponente es impar. Usaba como propiedad básica que las potencias de una función analítica son analíticas, aunque tuvo que cuidar los detalles de esa definición para exponentes no enteros. Para exponentes impares se veía obligado a aplicar un argumento de dualidad, que también explicaba en detalle. La respuesta de Hardy muestra su sorpresa: «muy elegante y hermoso. (...) Es sorprendente que ninguno de nosotros lo haya visto antes (¡ni siquiera para $p = 4$!)». La sencilla prueba de Riesz para el caso $p = 4$ es así: sea u armónica en el disco unidad y sea v su armónica conjugada tal que $v(0) = 0$. De la fórmula de Cauchy aplicada a la función analítica $(u + iv)^4$ en $|z| = r$ $(r < 1)$ se deduce

$$\int_0^{2\pi} (u(re^{it}) + iv(re^{it}))^4 dt = 2\pi u(0)^4 \leq \int_0^{2\pi} u(re^{it})^4 dt.$$

(En el último paso se usa la propiedad de la media de las funciones armónicas y la desigualdad de Hölder.) Considerando la parte real del miembro de la izquierda se sigue fácilmente que $\|v\|_4 \leq C\|u\|_4$ sobre cada circunferencia de radio r centrada en el origen (con C independiente de r). Basta tomar el límite cuando r tiende a 1 para obtener el teorema. El mismo procedimiento vale para los demás exponentes pares.

La prueba que Riesz envió a Hardy es la misma que apareció publicada en [59] y esbozada en [58]. La convergencia en norma L^p de la serie de Fourier aparece como aplicación del resultado para la función conjugada.

Meses antes, cuando aún no le había enviado los detalles, Riesz le había escrito a Hardy: «es enormemente curioso que mientras mi demostración es por así decirlo trivial para los exponentes pares, para los exponentes impares no tengo por el momento más que una demostración indirecta pasando por los exponentes no enteros». Hoy sabemos que hecho el caso de exponentes pares, el más sencillo, se puede utilizar interpolación para completar los exponentes $p > 2$ y dualidad para $1 < p < 2$. Si Riesz no siguió ese camino fue porque no tenía aún teorema de interpolación. Quizá motivado por su interés en hacer más sencilla la demostración de su teorema, el propio Riesz demostró el primer teorema de interpolación[12] ([60]) y lo aplicó a la función conjugada en la manera indicada. Hoy día la parte de la demostración original de Riesz que trata de los exponentes no enteros ha caído en el olvido.

 

Figura 7: Marcel Riesz (1886–1969) y Andrei Kolmogorov (1903–1987).

Entre las dos publicaciones de Marcel Riesz apareció un artículo de Kolmogorov ([41]) en el que probaba una desigualdad débil para la función conjugada de una función de L^1:

$$\sup_{t>0} t|\{x : |\tilde{f}(x)| > t\}| \leq C\|f\|_1.$$

De aquí se deduce que la sucesión $\{S_N f(x)\}$ de sumas parciales de una función f integrable converge en L^p para $0 < p < 1$. La desigualdad débil junto con un teorema de interpolación de Marcinkiewicz, de finales de los años treinta, también permite deducir el teorema de Marcel Riesz.

[12]Este teorema es parte de lo que hoy llamamos *teorema de Riesz-Thorin*. Olof Thorin, alumno de Riesz, introdujo las propiedades de las funciones analíticas en la prueba y extendió el teorema original en 1939.

10 . Convergencia en casi todo punto

Nikolai Lusin publicó en 1913 una nota en los *Comptes Rendus* en la que presentaba una condición necesaria y suficiente para la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función de L^2 ([51]). Lusin comenzó viendo que la serie de Fourier de f converge en casi todo punto si y sólo si se cumplen simultáneamente:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{2\tan t/2}\,dt = f(x) \quad \text{c.t.p.} \tag{6}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{t}\cos nt\,dt = 0, \tag{7}$$

donde $\tilde{f}$ es la función conjugada de f. (Las integrales en cero se entienden como valor principal.) Probó que (6) se cumple para toda función de L^2, de modo que (7) quedaba como única condición necesaria y suficiente. Dice Plancherel ([54]): «pero esta condición no es simple e ignoramos si la serie de Fourier de una función continua o de una función de cuadrado integrable tiene necesariamente puntos de convergencia y si su conjunto es de medida positiva». Ahora bien, satisfecha la condición (6) Lusin indica que es «infinitamente probable» que lo mismo ocurra con (7). Su argumento se basa en que la existencia de la integral en (6) es debida a la cancelación y no al tamaño, y que como $\cos nt$ tiene sus valores positivos y negativos uniformemente distribuidos, la cancelación debería seguir aplicándose por igual. Ahí nace la *conjetura de Lusin*: *la serie de Fourier de una función de L^2 converge en casi todo punto*.

Lusin presentó su tesis en 1915 y fue nombrado profesor de la universidad de Moscú. Allí, junto con su maestro Egorov, encabezó un extraordinario grupo de investigación —que los estudiantes llamaban *Luzitania*— al que pertenecieron Aleksandrov, Suslin, Menshov, Khinchine, Urysohn, Kolmogorov, Nina Bari, Lyusternik, Shnirelman y Novikov, entre otros. La tesis de Lusin, *Integración y series trigonométricas*, incluía una larga colección de problemas abiertos que fue una inagotable fuente de trabajo para su escuela. Los resultados más importantes sobre convergencia y divergencia puntual anteriores al teorema de Carleson aparecen en los primeros trabajos del joven Kolmogorov, uno de los más destacados matemáticos del siglo XX y alumno de Lusin ([53]).

Kolmogorov demostró en 1923 que existe una función integrable cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto ([39]) y poco después, en 1926, fue capaz de llevar la divergencia a todo punto ([42]). Además obtuvo dos resultados de convergencia:

- en 1924 demostró la convergencia lagunar para funciones de cuadrado integrable: *si $n_{k+1}/n_k > \lambda > 1$ y $f \in L^2$, entonces la sucesión $\{S_{n_k}f(x)\}$ converge a $f(x)$ en casi todo punto* ([40]);

- en 1926 dio con Seliverstov ([43]) la siguiente condición suficiente para la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\log n < +\infty.$$

Esta condición, obtenida independientemente por Plessner ([55]), permaneció como mejor resultado conocido durante cuarenta años.

Sin embargo, la conjetura de Lusin permanecía sin respuesta y el tiempo hizo cambiar de opinión a los expertos en cuanto a su veracidad. La primera monografía de Zygmund sobre series trigonométricas ([64], 1935) ni siquiera menciona la conjetura de Lusin. Pero más significativa es la manera en que presenta el problema en su segundo libro ([65], 1959). Primero dice en el prefacio que «el problema de la existencia de una función continua con serie de Fourier divergente en todo punto está todavía abierto». Luego leemos en el texto (vol. 2, pág. 164):

> Es concebible que la estimación $S_N f = o((\log n)^{1/2})$ sea óptima. Ésta es una conjetura muy fuerte, porque implica en particular la existencia de una $f \in L^2$ con serie de Fourier divergente en casi todo punto. El problema está abierto.

Más adelante trae el siguiente comentario (vol. 2, pág. 165):

> El teorema que sigue arroja alguna luz sobre el problema todavía no resuelto de la existencia de una función de L^2 con serie de Fourier divergente en casi todo punto

Claramente se ve que Zygmund no está sugiriendo la conjetura de Lusin, sino su negación. «El teorema que sigue» se refiere a la siguiente observación de Calderón, que fue importante en la resolución del problema: *si $S_N f(x)$ converge a $f(x)$ en casi todo punto para funciones de L^2, entonces*

$$\sup_{t>0} t^2 |\{x : \sup_N |S_N f(x)| > t\}| \le C\|f\|_2^2. \tag{8}$$

La otra gran monografía sobre series trigonométricas fue escrita por Nina Bari, alumna de Lusin, y publicada en 1961 (en ruso, [6] es la edición inglesa de 1964). En el capítulo VIII presenta el resultado de Lusin y explica los argumentos en que Lusin basó su conjetura. Después añade:

> La hipótesis de Lusin no ha sido ni confirmada ni refutada, aunque ya han pasado cuarenta años desde que fue propuesta. Sin embargo, los argumentos que condujeron a ella no tienen ninguna fuerza hoy día.

Se basa en que con argumentos semejantes se llegaría a concluir que si f y $\tilde{f}$ están en L^1, la serie de Fourier convergería en casi todo punto, lo que se sabe que no ocurre. Por tanto, indica, para probar (7) el hecho de que f está en L^2 debe usarse en forma esencial, no sólo la existencia en casi todo punto de la integral en (6).


Figura 8: Nikolai Lusin (1883–1950) y Lennart Carleson (1928).

Ante esta situación el resultado que Lennart Carleson obtuvo en 1965 fue una auténtica sorpresa. En efecto, probó que la conjetura de Lusin era cierta: la serie de Fourier de una función de L^2 converge en casi todo punto. Por tanto, también la de una función continua[13], lo que tampoco se conocía hasta entonces. Su prueba consistió precisamente en probar que (8) se cumplía ([9]). El propio Carleson ha contado más de una vez que comenzó buscando un contraejemplo y terminó produciendo una prueba. He aquí sus palabras tomadas de [19]:

> La gran autoridad en esos días era Zygmund y él estaba completamente convencido de que lo que uno tenía que obtener no era una prueba sino un contraejemplo. Cuando yo era un joven estudiante en Estados Unidos, tenía una idea de cómo producir unas funciones muy complicadas para un contraejemplo, encontré a Zygmund y él me animó a hacerlo. Estuve pensando durante unos quince años por aquí y por allá sobre cómo hacer que esos contraejemplos funcionasen, y la cosa interesante que sucedió fue que me di cuenta por qué debía haber un contraejemplo y cómo había que construirlo. Pensé que ya había comprendido cuál era la base y entonces para mi sorpresa pude probar que ese contraejemplo «correcto» no podía existir, y me di cuenta de repente de que había que intentar lo contrario, había que intentar probar lo que no estaba de moda, es decir, probar la convergencia. El aspecto

[13]Este resultado para funciones continuas se completa con el siguiente de Kahane y Katznelson: *dado un conjunto cualquiera de medida nula, existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en ese conjunto* [36].

> más importante al resolver un problema matemático es la convicción de cuál es el resultado verdadero. Entonces me llevó dos o tres años, usando las técnicas que habían sido desarrolladas en los veinte años anteriores.

El premio Abel 2006 fue otorgado a Lennart Carleson. El jurado destacó varios de sus resultados, pero indudablemente el nombre de Carleson va unido sobre todo al teorema de convergencia en casi todo punto de las funciones de L^2.

Poco después Richard Hunt extendió el resultado de Carleson hasta cubrir el rango de todos los espacios L^p con $p > 1$ ([32]).

11 . Los años recientes

El teorema de Carleson con la extensión por Hunt supuso la culminación de un camino que había empezado siglo y medio antes. En cierto modo, las grandes cuestiones sobre la convergencia de las series de Fourier quedaban resueltas.

La prueba de Carleson, además de la sorpresa que hemos mencionado, también trajo consigo una fama de impenetrabilidad. Se decía que era difícil de entender. Pero una vez sabido cuál es el resultado verdadero, es más fácil intentar otras pruebas. Pronto llegó una segunda debida a Charles Fefferman ([23]), distinta en los métodos, pero no por eso más sencilla. Durante mucho tiempo el resultado estaba ahí, pero no parecía que las pruebas hubiesen abierto nuevos caminos. Se escribieron libros con detalles de la demostración, como el de J. Arias de Reyna ([3]) que pretende explicar la motivación de cada paso de la prueba de Carleson. M. Lacey y C. Thiele resolvieron una conjetura sobre la transformada de Hilbert bilineal basándose en parte en los métodos de la prueba de Fefferman, lo que a su vez les permitió escribir su propia prueba del teorema de Carleson ([47]; una versión más detallada con información adicional es [46]). Estas pruebas de Lacey y Thiele están escritas para la transformada de Fourier en la recta real, aunque se pueden transferir a series de Fourier.

Una de los problemas en que se ha trabajado tras el teorema de Carleson-Hunt es en ir llenando el hueco que queda entre L^1, donde hay series de Fourier divergentes, y la unión de los espacios L^p, $p > 1$, donde las series de Fourier convergen en casi todo punto. Si consideramos un escala de espacios en la que se introducen logaritmos, los mejores resultados actuales provienen de la escuela rusa. Sea $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ no decreciente y escribamos $f \in \phi(L)$ si $\int \phi(|f(t)|)dt < +\infty$. Tenemos los resultados siguientes:

1. sea $\log^+ t = \log \max(t, 1)$ y $\phi(t) = t \log^+ t \log^+ \log^+ \log^+ t$; si $f \in \phi(L)$, la serie de Fourier de f converge en casi todo punto (Antonov, [2]));

2. si $\phi(t) = o(t\sqrt{\log t / \log\log t})$ cuando t tiende a infinito, existe f en $\phi(L)$ con serie de Fourier divergente en todo punto (Konyagin, [44]).

Fuera de la escala mencionada, Arias de Reyna construyó un espacio invariante por reordenamiento, que contiene la clase de Antonov y para el que se tiene la convergencia en casi todo punto ([3]). Para otros resultados y problemas relacionados véase [45].

Por otra parte, mucho queda por hacer en dimensiones superiores. Tanto que intentar una descripción de resultados y problemas alargaría demasiado este artículo. En [1] se puede encontrar un recorrido por la situación del problema hasta finales de los años ochenta y en [18] un resumen de resultados y problemas abiertos.

Referencias

[1] Sh. A. Alimov, R. R. Ashurov y A. K. Pulatov, *Multiple Fourier series and Fourier integrals* en V. P. Khavin y N. K. Nikolskii (eds.), *Commutative Harmonic Analysis IV, Enc. Math. Sci., 42*, Springer, 1992, 1–95.

[2] N. Yu. Antonov, Convergence of Fourier series, *East J. Approx.* **2** (1996), 187–196.

[3] J. Arias de Reyna, *Pointwise convergence of Fourier series*, Lecture Notes in Mathematics, 1785, Springer-Verlag, Berlín, 2002.

[4] S. Banach y H. Steinhaus, Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier, *Bulletin Int. Acad. Sciences de Cracovie* (1918), 87–96.

[5] S. Banach y H. Steinhaus, Sur le principle de la condensation de singularités, *Fund. Math.* **9** (1927), 50–61.

[6] N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series. Vols. I, II*, Pergamon Press, Macmillan, New York, 1964.

[7] P. du Bois-Reymond, Ueber die Fourierschen Reihen, *Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen* **21** (1873), 571-582.

[8] A. Cañada, Fourier y sus coeficientes, *Boletín de la SEMA* **36** (2006), 125–148.

[9] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.* **116** (1966), 135–157.

[10] H. S. Carslaw, *An introduction to the theory of Fourier's series and integrals*, tercera edición, Macmillan, 1930 (reeditado en Dover Publications, New York, 1950).

[11] M. L. Cartwright, Manuscripts of Hardy, Littlewood, Marcel Riesz and Titchmarsh, *Bull. London Math. Soc.* **14** (1982), 472–532.

[12] R. Cooke, Uniqueness of trigonometric series and descriptive set theory, 1870-1985, *Arch. History Exact Sci.* **45** (1993), 281–334.

[13] J. Dhombres y J.-B. Robert, *Fourier. Créateur de la physique-mathématique*, Belin, París, 1998.

[14] U. DINI, *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, Tipografia T. Nistri, Pisa, 1880.

[15] G. L. DIRICHLET, Sur la convergence des series trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *J. Reine Angew. Math.* **4** (1829), 157–169.

[16] G. L. DIRICHLET, Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen, *Repertorium der Physik* **1** (1837), 152–174.

[17] P. DUGAC, Éléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Arch. History Exact Sci.* **10** (1973), 41–176.

[18] M. I. DYACHENKO, *Convergence of multiple Fourier series: main results and unsolved problems* en *Fourier Analysis and related topics*, Banach Center Publ. 56, Warsaw, 2002, 37–44.

[19] B. ENGQUIST, *After the 'Golden Age': what next?*, Lennart Carleson entrevistado por Björn Enquist en B. ENGQUIST Y W. SCHMID (EDS.), *Mathematics unlimited - 2001 and beyond*, Springer, Berlín, 2001, 455–461.

[20] P. FATOU, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.* **30** (1906), 335–400.

[21] L. FEJÉR, Sur les fonctions bornées et intégrables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **131** (1900), 984–987.

[22] L. FEJÉR, Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **28** (1911), 63–104.

[23] C. FEFFERMAN, Pointwise convergence of Fourier series, *Ann. of Math.* **98** (1973), 551–571.

[24] J. FERREIRÓS (ED.), *Bernhard Riemann: Riemanniana selecta*, CSIC, Madrid, 2000.

[25] E. FISCHER, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris* **144** (1907), 1022–1024.

[26] J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, edición facsímil en Éditions Jacques Gabay, Paris, 1988.

[27] I. GRATTAN-GUINNESS, *The emergence of mathematical analysis and its foundational progress, 1780-1880* en I. GRATTAN-GUINNESS (ED.), *From the Calculus to Set Theory 1630-1910: An Introductory History*, Duckworth, Londres, 1980 (en castellano, *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: una introducción histórica*, Alianza editorial, Madrid, 1984).

[28] I. GRATTAN-GUINNESS, *Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur (1822)* en I. GRATTAN-GUINNESS, R. COOKE, L. CORRY, P. CRÉPEL Y N. GUICCIARDINI (EDS.), *Landmarks Writings in Western Mathematics*, Elsevier, Amsterdam, 2005, 354–365.

[29] I. GRATTAN-GUINNESS Y J. R. RAVETZ, *Joseph Fourier 1768-1830. A survey of his life and work*, MIT Press, Cambridge, 1972.

[30] E. Heine, Über trigonometrische Reihen, *J. Reine Angew. Math.* **71** (1870), 353–365.

[31] E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Vol. II*, Cambridge University Press, 1926 (reeditado en Dover Publications, New York, 1958).

[32] R. A. Hunt, *On the convergence of Fourier series* en *Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues* (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, 1968, 235–255.

[33] C. Jordan, Sur la série de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **92** (1881), 228–230.

[34] J. P. Kahane, Leopold Fejér et l'analyse mathématique au début du XXe siècle, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **2** (1981), 67–84.

[35] J. P. Kahane, *Le retour de Fourier*, Académie des Sciences, Paris, 2005 (`http://www.academie-sciences.fr/membres/in_memoriam/Generalites/Fourier_Kahane.pdf`). Traducción al castellano en este número de La Gaceta.

[36] J. P. Kahane y Y. Katznelson, Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques, *Studia Math.* **26** (1966), 305–306.

[37] J. P. Kahane y P. G. Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach, Londres, 1995.

[38] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972 (en castellano, *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días*, Alianza, Madrid, 1992).

[39] A. N. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, *Fund. Math.* **6** (1923), 324–328.

[40] A. N. Kolmogorov, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fund. Math.* **5** (1924), 96–97.

[41] A. N. Kolmogorov, Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, *Fund. Math.* **7** (1925), 24–29.

[42] A. N. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout, *C. R. Acad. Sci. Paris* **183** (1926), 1327–1328.

[43] A. N. Kolmogorov y G. A. Seliverstov, Sur la convergence des séries de Fourier, *Atti Accad. Naz. Lincei* **3** (1926), 307–310.

[44] S. V. Konyagin, On divergence of trigonometric Fourier series everywhere, *C. R. Acad. Sci. Paris* **329** (1999), 693–697.

[45] S. V. Konyagin, *Almost everywhere convergence and divergence of Fourier series* en M. Sanz-Solé, J. Soria, J.L. Varona, J. Verdera *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*, vol. II, European Mathematical Society, 1393–1403.

[46] M. T. Lacey, Carleson's theorem: proof, complements, variations, *Publ. Mat.* **48** (2004), 251–307.

[47] M. T. Lacey y C. M. Thiele, A proof of boundedness of the Carleson operator, *Math. Res. Lett.* **7** (2000), 361–370.

[48] H. Lebesgue, Sur les séries trigonométriques, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **20** (1903), 453–485.

[49] H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques. Professées au Collège de France, 1904–05*, facsímil en Albert Blanchard, Paris, 1975.

[50] R. Lipschitz, De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et pr ecipe earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum habent infinitum, disquisitio, *J. Reine Angew. Math.* **63** (1864), 296–308 (en francés, *Acta Math.* **36** (1913), 281–295).

[51] N. Lusin, Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **156** (1913), 1655–1658.

[52] D. Mascré, *Bernhard Riemann, posthumous thesis on the representation of functions by trigonometric series (1867)* en I. Grattan-Guinness, R. Cooke, L. Corry, P. Crépel y N. Guicciardini (eds.), *Landmarks Writings in Western Mathematics*, Elsevier, Amsterdam, 2005, 491–505.

[53] A. Olevskii, *Kolmogorov's theorems in Fourier analysis* en J. Lindenstrauss y V. Milman (eds.), *Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994)*, Birkhäuser, Basel, 1995, 199–218.

[54] M. Plancherel, Le développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle, *Enseignement Math.* **24** (1924-25), 19–58.

[55] A. I. Plessner, Ueber Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *J. Reine Angew. Math.* **155** (1925), 15–25.

[56] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Habilitationsschrift, 1854)*, Abhandlungen der Kšniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gšttingen, 13 (1868). Reproducido en B. Riemann, *Gesammelte mathematische werke*, Springer-Verlag, Berlín, 1990. Traducción parcial al castellano en [24], 41–60.

[57] F. Riesz, Sur les systèmes orthonormaux de fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris* **144** (1907), 615–619.

[58] M. Riesz, Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **178** (1924), 1464–1467.

[59] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées, *Math. Z.* **27** (1927), 218-244.

[60] M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.* **49** (1926), 465–497.

[61] H. A. Schwarz, Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, *J. Reine Angew. Math.* **74** (1872), 218–253.

[62] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*, Academic Press, New York, 1949.

[63] J. Tucciarone, The development of the theory of summable divergent series from 1880 to 1925, *Arch. History Exact Sci.* **10** (1973), 1–40.

[64] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, Monografije matematyczne V, Warszawa–Lwow, 1935.

[65] A. Zygmund, *Trigonometric series. Vol. I, II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1959 (última reedición en 2002).

Javier Duoandikoetxea
Departamento de Matemáticas
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Apartado 644, 48080 Bilbao
Correo electrónico: `javier.duoandikoetxea@ehu.es`

El retorno de Fourier[1]

por

Jean-Pierre Kahane

Puede sorprender este título: «El retorno de Fourier». ¿No es el nombre de Fourier, desde hace mucho tiempo, uno de los más familiares para el público científico? Series de Fourier, integrales de Fourier, transformadas de Fourier, son en matemáticas los temas más clásicos que puedan existir. La ecuación del calor, que gobierna en general los fenómenos de difusión (y que se aplica, en particular, a la difusión de las probabilidades ligadas al curso de la Bolsa como estableció Bachelier en 1900) es llamada por los físicos ecuación de Fourier. Para los ingenieros el análisis de Fourier es inseparable de la teoría de la señal, de la transmisión de los sonidos y de las imágenes. El mayor problema en astronomía y en astrofísica, donde lo que se observa resulta de la transformación de una señal por un aparato, es la deconvolución que permite remontar de la observación a la señal; el instrumento de esta deconvolución es la transformada de Fourier, y la transformada de Fourier rápida (*fast Fourier transform, FFT*) ha sido un factor decisivo en el desarrollo explosivo de la astrofísica desde 1962. *FFT*, palabra clave de la deconvolución, es hoy un útil indispensable en un gran número de ciencias y técnicas.

Fourier es una especie de nombre común, en todos los sentidos del término, para científicos e ingenieros, desde la genómica estructural a la telefonía.

Hace tiempo que los matemáticos de Grenoble crearon el Instituto Fourier. Desde 1978 la universidad científica y médica se llama *Université Joseph Fourier*. Las ediciones Belin publicaron en 1998 un grueso libro sobre «Fourier, creador de la física matemática» en el que el matemático Jean Dhombres y el físico Jean-Bernard Robert describen de forma magistral, en su contexto, la vida y obra de Joseph Fourier. Se encuentran hoy artículos y estudios sobre Fourier en todos los diccionarios y todas las enciclopedias.

Sí, Fourier está muy presente y comienza a ser bien conocido. Pero no siempre ha sido así. La actitud con respecto a Fourier en Francia es un buen test de las mentalidades en materia científica y, en particular, de las relaciones entre física y matemática.

Hace cincuenta años en Francia Joseph Fourier era ignorado. Hasta su sexta edición en 1974 la *Encyclopaedia Universalis* no contenía ningún artículo sobre él. Era la época de un cierto divorcio entre física y matemática; Fourier era, sin duda, demasiado matemático para ser un verdadero físico, demasiado

[1]Traducción de Javier Duoandikoetxea. El artículo original, titulado «Le retour de Fourier», fue publicado electrónicamente por la Académie des Sciences en 2005 (`http://www.academie-sciences.fr/membres/in_memoriam/Generalites/Fourier_Kahane.pdf`) y aparecerá también en *Liber maicorum, Jean Dhombres*, Patricia Radelet-de Grave ed., Collection Réminisciences n° 8, Turnhout, Brepols, 2007.

físico para ser un verdadero matemático. Hoy, por el contrario, Fourier es emblemático del acercamiento entre física y matemática. En un periodo de dos siglos Fourier ha sido, de manera asombrosamente contrastada, desestimado y celebrado.

En 1805, con 37 años, tenía tras él una vida agitada y una excelente reputación científica. La reseña redactada por Arago relata de manera apasionante una existencia ligada a los grandes acontecimientos de la época: pobre huérfano, alumno brillante en la Escuela real militar de Auxerre, profesor de esta escuela a la edad de 16 años y medio, autor con 18 años de una memoria notable sobre la localización de las raíces de las ecuaciones algebraicas, candidato desgraciado a la entrada en la artillería, a pesar del apoyo del matemático Legendre (Arago cita la mordaz respuesta del Ministro de la guerra: «Fourier, no siendo noble, no podría entrar en la artillería ni aunque fuese un segundo Newton»), novicio en la abadía de Saint-Benoît sur Loire, renunciando a pronunciar sus votos por respeto a los decretos de la Asamblea Nacional, comprometido como actor eficaz en la revolución, alumno en la *École normale* del año III donde llamó la atención de Monge, «instructor» de la *École Polytechnique*, participante en la expedición a Egipto en el tiempo en que Bonaparte firmaba sus órdenes como «miembro del Instituto comandante en jefe del ejército de Oriente», secretario perpetuo del Instituto de El Cairo, cuyo presidente era Monge, redactor jefe del *Courrier d'Egypte*, hábil negociador en el momento de la retirada del ejército de Oriente, y escogido por Bonaparte como prefecto de Isère en febrero de 1802. En 1805 afrontó grandes trabajos de interés público como prefecto, la puesta a punto de su Prefacio a la *Description de l'Egypte*, y una investigación que había emprendido sobre la propagación del calor.

No era un tema nuevo. Ya Newton se había ocupado de él. Laplace y Lavoisier colaboraron en 1780 en la determinación de calores específicos y expusieron de manera muy clara su desacuerdo:

> Los físicos están divididos sobre la naturaleza del calor... fluido extendido por toda la naturaleza... (o) resultado de los movimientos insensibles de las moléculas de la materia.

Lavoisier prefiere el fluido, Laplace la agitación molecular.

Fourier no se preocupa ni de la naturaleza del calor ni del mecanismo de su propagación. Tanto en la memoria que deposita en 1807 en el *Institut national des sciences et des arts* como en la versión desarrollada que da en 1811 y después en su *Théorie analytique de la chaleur* en 1822, indica su propósito limitándolo de este modo:

> Cuando el calor está desigualmente distribuido entre los diferentes puntos de una masa sólida, tiende a ponerse en equilibrio y pasa lentamente de las partes más calientes a las que lo están menos; al mismo tiempo se disipa por la superficie y se pierde en el medio o en el vacío. Esta tendencia a una distribución uniforme y

> esta emisión espontánea que se opera en la superficie de los cuerpos cambian continuamente la temperatura de los distintos puntos. La cuestión de la propagación del calor consiste en determinar cuál es la temperatura de cada punto de un cuerpo en un instante dado, suponiendo que las temperaturas iniciales son conocidas.

A partir de 1807 Fourier tenía completado su programa en lo esencial. Había estudiado la manera en la que se presenta el equilibrio del calor o su propagación en el transcurso del tiempo en cuerpos de formas diversas, y establecido las dos ecuaciones generales: en el interior del sólido,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

donde D es la densidad, K la conductividad interna y C el calor específico, y en el borde,

$$m\frac{\partial u}{\partial x} + n\frac{\partial u}{\partial y} + p\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{h}{K}qu = 0,$$

donde m, n y p son las coordenadas de un vector normal a la superficie y q su longitud, y h representa la conductividad superficial.

El instrumento principal para la puesta en evidencia de estas ecuaciones es la noción de flujo, que es una importante aportación conceptual de Fourier a la física. Él mismo no se equivoca; al final de la *Théorie analytique de la chaleur* (§429) declara:

> Esta noción de flujo es fundamental; mientras no se haya adquirido, no es posible hacerse una idea exacta del fenómeno y de la ecuación que expresa.

Se trataba a continuación para Fourier de resolver estas ecuaciones en derivadas parciales en una serie de casos particulares. Entonces desarrolló el método de descomposición en armónicos que hoy llamamos análisis de Fourier. Desde el primer ejemplo, el cálculo de la temperatura en el interior de un sólido ilimitado cuya base es una banda horizontal y los lados dos semiplanos verticales apoyados sobre la base, cuando la base se mantiene a la temperatura del agua hirviendo (denotada 1) y los lados a la del hielo que funde (denotada 0), introduce una serie trigonométrica para representar una función dada. Después dedica una serie de artículos a la determinación de series trigonométricas, sumas infinitas de términos de la forma $a_n \sin nx$ o $b_n \cos nx$, que llamamos hoy series de Fourier, supuestamente aptas para representar funciones de formas diversas sobre un intervalo, para ilustrar el hecho, paradójico en su época, de que una misma función (suma de una serie trigonométrica) puede tener expresiones diferentes en intervalos diferentes.

Fourier no se limita a la teoría y a los cálculos. En su apartamento de prefecto lleva a cabo experimentos para verificarlos y redacta cuidadosamente sus informes. El libro de Dhombres y Robert reproduce algunos de ellos, incluso en forma de fotocopias de manuscritos inéditos de Fourier (pág. 330 y siguientes).

Trabaja en el torbellino de la vida pública y en un aislamiento científico total. En 1807 termina la redacción de un imponente manuscrito titulado *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, lo lleva a París, se lo hace conocer a sus colegas Biot y Poisson, que ha encontrado en la *École polytechnique*, y lo presenta a la primera Clase del *Institut national des sciences et des arts* el 21 de diciembre. Lagrange, Laplace, Monge y Lacroix son designados informadores. Silencio. Una reseña resumida de su trabajo aparece en marzo de 1808, firmada por P. (Poisson). Desestimación, incomprensión, es un verdadero fracaso para Fourier.

Comienza para Fourier una larga marcha. Inicia una correspondencia con Lagrange, la autoridad más respetada del mundo matemático, y Laplace, el más capaz de juzgar su obra. El esperado informe sigue sin llegar. Pero el Instituto nacional propone la propagación del calor como tema para el *Grand Prix* que debe ser otorgado en 1812. Fourier remodela su texto, lo reorganiza, lo enriquece, y lo dirige a la primera Clase del Instituto nacional en forma anónima según la costumbre, bajo el hermoso epígrafe *Et ignem regunt numeri* (también el fuego está regido por los números). Los comisarios son Lagrange, Laplace, Malus, Haüy y Legendre. Su veredicto, favorable a la memoria de Fourier, se emite el 16 de diciembre de 1811 y la coronación de la obra tiene lugar en sesión pública el 6 de enero de 1812. Es por fin la consagración. Pero ya se dibujan las sombras. El informe no es unánimemente elogioso, como lo muestra este extracto:

> Esta obra encierra las verdaderas ecuaciones diferenciales de la transmisión del calor, tanto en el interior de los cuerpos como en su superficie; y la novedad del tema, junto con su importancia, han decidido a la Clase a coronar esta obra, observando, sin embargo, que la manera en la que el autor llega a sus ecuaciones no está exenta de dificultades, y que su análisis para integrarlas deja aún algo que desear, tanto en lo que respecta a la generalidad como incluso del lado del rigor.

En resumen, el trabajo es innovador, pero no es perfecto. Hay algo más grave aún: el Instituto nacional no decide su publicación. Nuevo fracaso para Fourier.

Sin embargo, Fourier está atrapado en la tormenta napoleónica. Ha sido hecho barón por Napoleón. Ha terminado finalmente la *Description de l'Egypte* y puesto al joven Champollion frente a los jeroglíficos que hay que descifrar. En 1813, la *Grande Armée* es derrotada, en 1814 Francia es invadida, Napoleón abdica, los dignatarios del Imperio se alían con los Borbones. Es la primera Restauración, en el transcurso de la cual Fourier se mantiene como prefecto de Isère. En 1815 es el retorno de la isla de Elba. Fourier se opone a Napoleón, que le destituye como prefecto de Isère y le nombra casi inmediatamente prefecto de Rhône. Napoleón exige que Fourier proceda a efectuar depuraciones y como Fourier se niega, le destituye de nuevo, esta vez de manera definitiva, en vísperas de la derrota de Waterloo y de la segunda Restauración.

Fourier, persona no grata para los Borbones, acepta la tarea de dirigir una oficina de estadísticas en la prefectura del Sena. Arago hablará favorablemente de las memorias que redactó en ese puesto. El medio académico está turbulento: Monge y Carnot son excluidos de la Academia de ciencias a la vez que Bonaparte. Biot y Poisson debaten sobre la propagación del calor aunque la memoria de 1811, que utilizan, nunca ha sido publicada. Fourier acude a Laplace, se presenta como candidato a la Academia, es elegido pero recusado por Luis XVIII. Es candidato de nuevo a una plaza vacante en la sección de física general, es reelegido triunfalmente y por fin nombrado en mayo de 1817.

Ahora se trata de una consagración que no hace sino afirmarse hasta su muerte en 1830. Publica en el *Bulletin de la Société philomatique* textos sobre las aplicaciones de sus trabajos a la calefacción de las casas y al origen del calor terrestre, exige la publicación sin cambios de su memoria de 1811, que va a escalonarse de 1819 a 1826, y durante este tiempo pone a punto una nueva presentación de sus trabajos, la *Théorie analytique de la chaleur*, publicada como libro en 1822.

También trabaja sobre otro tema que llama análisis indeterminado, a saber, el estudio de las soluciones de un sistema de desigualdades algebraicas. Una pequeña parte se publica, una gran parte permanece inédita.

En 1822 es elegido secretario perpetuo de la Academia de ciencias para las ciencias matemáticas. En 1826 se convierte en miembro de la *Académie française*. Su obra se impone. Ha triunfado sobre sus competidores y las cuestiones que deja en suspenso inspiran a jóvenes y brillantes matemáticos como el alemán Lejeune-Dirichlet, el suizo Sturm y el francés Navier. El joven Auguste Comte le celebra como un precursor del positivismo y en 1830, después de su muerte, como igual a Newton:

> ... no temo proclamar, como si estuviera a diez siglos de ahora, que desde la teoría de la gravitación, ninguna creación matemática ha tenido más valor que ésta, en lo que respecta a los progresos generales de la filosofía natural; quizá incluso, escrutando más de cerca la historia de estos dos grandes pensamientos, se encontraría que la fundación de la termología matemática estaba menos preparada para Fourier que la de la mecánica celeste para Newton.

Y, sin embargo, después de la muerte de Fourier una sombra espesa comienza a envolver su memoria.

Antes de encontrar una explicación leamos lo que escribe Victor Hugo. En 1862 publica *Les Misérables*. Esta novela, escrita en el exilio, es un monumento de erudición histórica a la vez que una gran obra popular. El libro tercero comienza con una evocación del año 1817. Es una avalancha al estilo Hugo de hechos y anécdotas, de donde extraigo una pequeña frase, una frase que dice todo sobre mi tema:

> Había en la Academia de Ciencias un Fourier célebre a quien la posteridad ha olvidado y en no se qué desván un Fourier oscuro de quien el futuro se acordará.

El «Fourier oscuro» es Charles Fourier (1772-1837), el falansteriano. El «Fourier célebre» es el barón Joseph Fourier, el que nos ocupa.

¿Por qué cree Victor Hugo que la posteridad ha olvidado a este célebre Fourier y en qué tenía razón? Victor Hugo era amigo de Arago, que siendo muy joven, en 1809, había sido elegido en la primera Clase del *Institut national des sciences et des arts* y que sucedió a Fourier como secretario perpetuo en 1830. Arago conocía las agitaciones que había provocado el uso por Fourier de las series trigonométricas. Lagrange, el matemático más respetado de la época, hacía tiempo que había condenado todas las tentativas de este tipo y el informe para el Gran Premio ganado por Fourier declaraba, como ya hemos visto, que

> su análisis... deja aún algo que desear, tanto en lo que respecta a la generalidad como incluso del lado del rigor.

Entre los jóvenes Fourier tenía competidores influyentes: Poisson y Cauchy. En su elogio fúnebre de Fourier, Arago está bien informado y es elocuente en lo que corresponde a la vida de Fourier, pero casi mudo sobre su obra como matemático. A este respecto, la necrología tiene aspecto de entierro.

Victor Hugo traduce un sentimiento extendido en Francia desde 1830: Joseph Fourier está superado. La continuación ha confirmado su juicio. Hay en París una calle Charles Fourier, pero no hay calle Joseph Fourier. Nunca ha habido un proyecto de publicación de las obras completas de Fourier, y Darboux, que en 1880-1890 publicó y comentó cuidadosamente una selección, que naturalmente incluía la *Théorie analytique de la chaleur*, dejó de lado todo el «análisis indeterminado», es decir, el estudio de sistemas de desigualdades, al que creía que Fourier había atribuido una importancia excesiva. Si los métodos introducidos con este fin por Fourier hubieran sido publicados, aparecerían hoy como una de las fuentes de la programación lineal y, más generalmente, de las matemáticas de la economía.

Mucho más tarde, en los años 1950, cuando ya el nombre de Fourier aparecía en los manuales de matemáticas y de física, sus *Oeuvres* publicadas por Darboux tenían pocos lectores. Darboux mismo había multiplicado las advertencias sobre las formulaciones atrevidas, y había unas cuantas, sólo sobre el tema de las series trigonométricas. Según Fourier, toda función dada sobre un intervalo es desarrollable en una serie de ese tipo, los coeficientes vienen dados por una fórmula integral y la serie converge en todo punto a la función. Pues bien, en este enunciado todo es falso. Para aplicar el método de Fourier es necesario que la función sea integrable, y Fourier no se preocupa de ello. Incluso cuando la función es continua la serie puede diverger en algunos puntos. Fourier no da la demostración más que sobre un ejemplo y se atreve imprudentemente a decir que tiene valor general. Además, resume su propósito escribiendo fórmulas que no tienen ningún sentido como la convolución de una función con la serie $1/2 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x \ldots$, que diverge en todo punto como señala Darboux. Su caso se agrava cuando pasa a las integrales en lugar de las series, derivando bajo el signo integral expresiones que no son integrables. Según los estándares de rigor matemático en vigor desde los años 1830, sobrepasa sin cesar lo que tendría derecho a escribir legítimamente.

No es un matemático fiable según la norma vigente. Es quizá una gloria pasada. En 1970 no es una gloria nacional. Su ausencia de la *Encyclopaedia Universalis* traduce lo que Victor Hugo expresaba un siglo antes: Joseph Fourier es un Fourier célebre en otro tiempo que la posteridad ha olvidado.

Esta desestimación de Fourier tiene raíces más profundas: es la concepción misma de las matemáticas la que está en tela de juicio. 1830 es un año bisagra. Ya he citado el comentario de Auguste Comte, entusiasta sobre Fourier y su enfoque de la ciencia, datado en ese año. En 1830 aparece igualmente un artículo de Lejeune-Dirichlet que contiene el primer teorema general sobre la convergencia de las series de Fourier, y que a menudo es considerado como el primer texto de análisis matemático rigurosamente impecable. El cuestionamiento de las concepciones de Fourier aparece de manera formal con otro joven alemán, Jacobi, amigo de Dirichlet.

En 1830 Jacobi tenía 26 años. Intercambiaba una importante correspondencia científica en francés con el muy respetado Legendre. Como muchos jóvenes matemáticos alemanes de la época, estaba atento a lo que sucedía en Francia. He aquí lo que escribió en una carta a Legendre, unas semanas después de la muerte de Fourier, el 4 de julio de 1830:

> Mr. Poisson no debería haber reproducido en su informe una frase poco acertada de Mr. Fourier en la que este último nos reprocha a Abel y a mí el no habernos ocupado preferentemente del movimiento del calor. Es cierto que Mr. Fourier opinaba que el fin principal de las matemáticas es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería haber comprendido que el fin único de la ciencia es el honor del espíritu humano y que por esa razón una cuestión de números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo.

Siguiendo a Jacobi, el honor del espíritu humano se ha convertido en una especie de consigna de la ciencia pura. «En honor del espíritu humano» se ha convertido por medio de la pluma de Dieudonné en el emblema de la matemática pura, especialmente de Bourbaki. El inmenso esfuerzo hecho por los matemáticos en el siglo XIX, sobre todo en Alemania, de clarificación, rigor, puesta en forma y puesta en orden de las nociones matemáticas, que ha desembocado con Bourbaki en tomar las matemáticas desde el principio y en dar demostraciones completas, rompe en efecto con la filosofía de Fourier, incluso aunque las series de Fourier con Dirichlet, Riemann y Cantor lo hayan alimentado poderosamente.

Jacobi tenía razón. Para Fourier el fin principal de las matemáticas es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales. Se explica con elocuencia en el *Discours préliminaire à la théorie analytique de la chaleur* del que copiamos dos pasajes significativos:

> Las ecuaciones del movimiento del calor, como las que expresan las vibraciones de los cuerpos sonoros o las oscilaciones últimas de los líquidos, pertenecen a una de las ramas de la ciencia del cálculo más recientemente descubiertas... Después de haber establecido estas ecuaciones diferenciales, había que obtener las integrales; lo que consiste en pasar de una expresión común a una solución propia sujeta a todas las condiciones dadas. Esta difícil búsqueda exigía un análisis especial, fundado sobre nuevos teoremas... El método que de él se deriva no tiene nada de vago, ni de indeterminado en las soluciones. Las conduce hasta las últimas aplicaciones numéricas, condición necesaria de toda investigación, sin las que no se llegaría más que a transformaciones inútiles...
>
> El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos... Las ecuaciones analíticas... se extienden a todos los fenómenos generales. No puede haber lenguaje más universal y más simple, más exento de errores y oscuridades, es decir, más digno de expresar las relaciones invariables de los seres naturales. Considerado desde este punto de vista, el análisis matemático es tan extenso como la propia naturaleza... Su principal atributo es la claridad. No tiene signos para explicar las nociones confusas. Relaciona los fenómenos más diversos y descubre secretas analogías que los unen... Nos los hace presentes y medibles, y parece ser una facultad de la razón humana, destinada a suplir la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos.

El primer pasaje marca el proceso: poner en ecuación (aquí una ecuación en derivadas parciales) un fenómeno natural (aquí los movimientos del calor); encontrar la solución particular correspondiente a unas condiciones dadas (condiciones en los límites, condiciones iniciales) que lleva a definir las soluciones «hasta las últimas aplicaciones numéricas». El segundo pasaje expresa la filosofía de Fourier y es un himno al análisis matemático. Al lado del «estudio profundo de la naturaleza» Fourier tiene también en cuenta, y lo explica en otra parte, lo que Jacobi llama «la utilidad pública» (calefacción de las casas, uso de la energía solar y de la geotermia).

Partir de fenómenos naturales o de cuestiones sociales, extraer métodos generales y concluir dando métodos de cálculo numérico, todo esto suena más moderno hoy que hace 50 años, porque los ordenadores y la modelización han pasado por ahí. Es una razón de fondo del retorno de Fourier.

Sin embargo, el retorno de Fourier se anunciaba también de otra manera, en el seno mismo de las matemáticas puras. Los problemas relacionados con las series de Fourier, en el transcurso de los siglos XIX y XX, no han cesado de servir de motivación, de estimulante o de test para un gran número de teorías matemáticas, de la teoría de números al análisis funcional y a las probabilidades pasando por las definiciones de la integral y la teoría de conjuntos. Los primeros actores de este movimiento han sido Lejeune-Dirichlet y Riemann. Es gracias a la tesis de Riemann sobre las series trigonométricas que se habla hoy de series de Fourier. En efecto, las series trigonométricas habían sido introducidas bastante antes de Fourier por Daniel Bernoulli en el estudio de las cuerdas vibrantes. Fórmulas análogas a las de Fourier, pero referidas sólo a un número finito de datos y de coeficientes, se encuentran ya en Lagrange, quien ponía en duda la posibilidad de su extensión. Riemann estudia cuidadosamente la historia del tema y concluye con un juicio inapelable:

> Fourier es el primero que ha comprendido de manera exacta y completa la naturaleza de las series trigonométricas.

Riemann explica las reticencias de Lagrange ante la audacia de Fourier y pone de relieve el inmenso alcance del acoplamiento de las dos fórmulas

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Este acoplamiento, extendido a situaciones más generales, se llama transformación de Fourier y traduce sus dos aspectos: el análisis armónico, que determina en una función $f(x)$ el peso de los diferentes armónicos por medio del cálculo de los coeficientes a_n y b_n, y la síntesis armónica, que consiste en recuperar la función $f(x)$ con ayuda de la primera fórmula.

De hecho, en el transcurso del siglo XIX y posteriormente las nociones más fundamentales del análisis han sido elaboradas a partir de estas fórmulas o en relación con ellas: la de función con Dirichlet; la de integral con Riemann (integral de Riemann), después con Lebesgue (integral de Lebesgue), Denjoy (totalización de Denjoy), Laurent Schwartz (distribuciones de Schwartz); la de conjunto de puntos con George Cantor. En particular, las distribuciones de Schwartz legitiman completamente lo que yo llamaba más arriba, siguiendo a Darboux, «las fórmulas que no tienen ningún sentido». La convergencia de las series de Fourier ha dado mucho trabajo a los matemáticos y les ha llevado a modificar el problema: ¿qué hacer ante una serie? Si se trata de una serie numérica, hay que encontrar los procedimientos de sumación que se le adaptan. Si se trata de una serie de funciones, se puede soñar en un tratamiento por medio de una geometría nueva en un espacio en el que los puntos representan funciones: es el nacimiento del análisis funcional. En particular, las series trigonométricas son series «ortogonales». El último avatar de las series de Fourier es la teoría de ondículas, debida a Yves Meyer en su parte matemática, y que comienza como la creación y el estudio de una nueva clase de series ortogonales.

El alcance real de las fórmulas de Fourier se percibe hoy mejor que antes: constituyen un programa. Se puede variar el sentido que se da a las funciones, a las series y a las integrales. Se trata en todos los casos de análisis y síntesis armónica. Es trabajo de los matemáticos introducir los conceptos y los instrumentos que hacen válidas las fórmulas.

Los físicos no descansan. El título completo del libro de Dhombres y Robert es *Fourier, creador de la física matemática*. La noción de flujo, esclarecida por la notación vectorial, es de uso tan constante que se puede olvidar su origen, el flujo de calor. La ecuación del calor figura con la ecuación de las cuerdas vibrantes y la ecuación del potencial en la trinidad de las ecuaciones en derivadas parciales fundamentales de la física. La teoría del movimiento browniano y todos los fenómenos de difusión han renovado el interés por ella. Las series de Fourier y las integrales de Fourier se imponen en la teoría de la señal y en todas sus variantes. La transformada de Fourier es el paradigma de la búsqueda de valores propios de los operadores en física.

Los físicos han sido sensibles al carácter efectivo de los procedimientos de cálculo puestos en marcha por Fourier antes que los matemáticos. Para Fourier, el interés de las series trigonométricas era permitir un cálculo rápido cuando eran «muy convergentes» o «extremadamente convergentes». Estos términos no tienen definición matemática y, sin embargo, tienen un sentido claro. Se trata de permitir cálculos efectivos, allí donde se necesitan (en el caso de Fourier, el cálculo de la temperatura en un punto de un sólido cuando se fija la distribución de temperaturas en el borde). En este sentido, la rapidez de la convergencia es más importante que el propio hecho de la convergencia. Una serie «extremadamente convergente» tiene un valor práctico: bastan algunos términos para una buena aproximación de la suma.

Volvamos para terminar a las matemáticas de hoy. Ahora mejor que nunca los matemáticos aprecian el alcance de los programas visionarios, que nunca son formalizados completamente. Aprecian igualmente los procedimientos de cálculo efectivos, a los que la informática y los ordenadores han dado una nueva dimensión. Fourier entra en resonancia con la forma actual de concebir el trabajo matemático.

Si juzgo por mí mismo, ya no leo a Fourier como en otro tiempo. Antes, con la impertinencia de la juventud y la precaución de mis antepasados, le miraba desde arriba. Hoy, busco lo que quiere decir y cómo ha podido llegar tan bien. Una de las claves viene dada por Fourier, es «el estudio profundo de la naturaleza». Tampoco sobre esto los matemáticos de hoy tienen el mismo punto de vista que antes. La unidad de las matemáticas se traduce menos por los fundamentos y las estructuras que por las interacciones en su seno, alimentadas por las interacciones con la física y otras ciencias. En 1960 se hablaba de la matemática, en 1980 de las matemáticas puras y aplicadas, y en 2000 se ve a las matemáticas abrazando ideas y métodos venidos de todas las ciencias, amasándolas, destilándolas, extrayendo una sustancia general y poderosa susceptible de ser invertida en otra parte, mucho más allá de lo que la ha hecho nacer. En esto las matemáticas vuelven a encontrar una buena parte de su historia, y a Fourier en particular.

Un ejemplo emblemático del retorno de Fourier es la teoría de ondículas de la que ya he dicho algo. Pero es, sobre todo, desde el origen y hoy más que nunca un punto de encuentro de físicos, ingenieros y matemáticos. Es a un físico, Alex Grossman, y a un ingeniero, Jean Morlet, a quienes debe Yves Meyer su introducción al tema en 1985. Hoy las ondículas aportan a la vez que un medio potente para la modelización y el cálculo, un lenguaje y un punto de vista común a toda la ciencia de nuestro tiempo. Sin embargo, el retorno de Fourier que manifiestan se extiende mucho más allá del análisis de Fourier. Las partes más vivas de las matemáticas se encuentran hoy en interacción con la física, la economía, la industria, la biología. El retorno de Fourier, del que aquí tratamos, más allá de las indicaciones algo resumidas que he dado sobre el análisis de Fourier, es el retorno a su manera de ver, a la filosofía del *Discours préliminaire*.

Las matemáticas evolucionan y progresan, demasiado poca gente lo sabe. Se manifiestan grandes tendencias como en todas las ciencias, con cambios de puntos de vista a veces rápidos. Pero, a diferencia de otras disciplinas, las matemáticas no se desvían de su pasado. Al contrario, el auge contemporáneo revaloriza sectores enteros, se podrían dar muchos ejemplos. Es pues imprudente creer muerto el pasado. Para mí, la resurrección de Fourier no significa de ningún modo el entierro de Jacobi o Bourbaki, que me parecen haber tenido su lugar en la cultura y en el imaginario de los matemáticos, tanto por su filosofía como por su obra. El Panteón matemático está poblado por sombras muy vivas que cambian de lugar en el transcurso del tiempo, algunas muy visibles y otras en retirada. Mi propósito era subrayar el retorno al primer plano, entre ellas, de Joseph Fourier.

Jean-Pierre Kahane
Département de Mathématiques
Université Paris-Sud Orsay
Bât. 425, F-91405 Orsay Cedex, France
Correo electrónico: `jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr`