La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

48 Olimpíada Internacional de Matemáticas

por

Ignasi Mundet y María Gaspar

La Olimpíada Internacional se ha celebrado este año en Vietnam. Ha sido un poco más tarde de lo que viene siendo habitual, comenzando el 18 de julio para el Jurado y el 23 de julio para los estudiantes. Formaban el equipo español los seis ganadores de nuestra Olimpíada Nacional: Diego Izquierdo (Madrid), Adrián Rodrigo (Zaragoza), Daniel Remón (Asturias), Gabriel Furstenheim, David Alfaya (ambos de Madrid) y nuestro bejamín, el riojano Glenier Lázaro Bello, de quince años.

Todos ellos, junto con los ganadores de medalla de plata que por razones de edad pueden aún participar en la Olimpíada, se reunieron a principios de julio en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Politécnica de Cataluña, trabajando en jornadas muy intensas. Son muchas las personas, profesores y antiguos olímpicos, que trabajan desinteresadamente en la preparación del equipo. A todos ellos, nuestro reconocimiento, que personalizamos en Josep Grané y Juan Manuel Conde.

Además, como parte de la preparación, Diego, Gabriel, David y Glenier, junto con Arnau Messegué y Andrés Rodríguez (ambos de 1° de Bachillerato y con Medalla de Plata en la OME), asistieron en Bucarest al primer concurso internacional de Matemáticas *Arquímedes* (IMAC) acompañados por el Profesor José Luis Díaz Barrero, de la UPC. Allí compitieron con equipos de Rumanía, Moldavia y Serbia. El Concurso se desarrolló siguiendo las pautas de la IMO: se propusieron seis problemas en dos sesiones de cuatro horas y media. Nuestros chicos consiguieron una medalla de oro (Diego Izquierdo), tres de plata (Arnau Messegué, David Alfaya y Gabriel Furstenheim) y dos de bronce (Glenier Lázaro y Andrés Rodríguez).

Los Jefes de Delegación de los 93 países participantes estuvieron recluidos en Halong, en un magnífico hotel con vistas maravillosas sobre la famosa bahía del mismo nombre. Los organizadores vietnamitas se han tomado realmente en serio el cumplimiento de la norma que establece, para preservar la confidencialidad, el aislamiento del Jurado durante el proceso de selección de los problemas. Era imposible asomar la nariz fuera del hotel, vigilado por soldados armados. Solo cuando tras cuatro días de encierro parte del Jurado, aludiendo a razones médicas, amenazó con sublevarse, se permitieron cortos paseos por el exterior, siempre en grupos de al menos cinco nacionalidades distintas, y tras haber recibido un curso intensivo sobre métodos y formas de cruzar la calle: el tráfico en Vietnam es realmente caótico. Y eso que Halong no es Hanoi, lugar en el que se alojaron los 520 estudiantes participantes durante los ocho días de su estancia en Vietnam.

El Comité de Selección de problemas había hecho una preselección de 29 (lista corta) entre las más de 120 propuestas de los países participantes. Existe el compromiso de no hacerla pública hasta el comienzo de la siguiente Olimpíada. En la lista figuraban 7 problemas de Álgebra, Combinatoria y Teoría de Números respectivamente y 8 de Geometría. En la mañana del día 22 estaban elegidos los seis problemas de las pruebas, que han sido los siguientes:

Primer día

Hanoi, 25 de julio de 2007

PROBLEMA 1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales. Para cada i $(1 \le i \le n)$ se define

$$d_i = \text{máx}\{a_j : 1 \le j \le i\} - \text{mín}\{a_j : i \le j \le n\}$$

y sea

$$d = \text{máx}\{d_i : 1 \le i \le n\}.$$

(a) Demostrar que para cualesquiera números reales $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$,

$$\text{máx}\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Demostrar que existen números reales $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ para los cuales se cumple la igualdad en $(*)$.

PROBLEMA 2. Se consideran cinco puntos A, B, C, D y E tales que $ABCD$ es un paralelogramo y $BCED$ es un cuadrilátero cíclico y convexo. Sea ℓ una recta que pasa por A. Supongamos que ℓ corta al segmento DC en un punto interior F y a la recta BC en G. Supongamos también que $EF = EG = EC$. Demostrar que ℓ es la bisectriz del ángulo DAB.

PROBLEMA 3. En una competencia de matemáticas algunos participantes son amigos. La amistad es siempre recíproca. Decimos que un grupo de participantes es una *clique* si dos cualesquiera de ellos son amigos. (En particular, cualquier grupo con menos de dos participantes es una clique). Al número de elementos de una clique se le llama *tamaño.* Se sabe que en esta competencia el mayor de los tamaños de las cliques es par.

Demostrar que los participantes pueden distribuirse en dos aulas, de manera que el mayor de los tamaños de las cliques contenidas en un aula sea igual al mayor de los tamaños de las cliques contenidas en la otra.

Segundo día

Hanoi, 26 de julio 2007

Problema 4. En un triángulo ABC la bisectriz del ángulo BCA corta a la circunferencia circunscrita en R ($R \neq C$), a la mediatriz de BC en P y a la mediatriz de AC en Q. El punto medio de BC es K y el punto medio de AC es L.
Demostrar que los triángulos RPK y RQL tienen áreas iguales.

Problema 5. Sean a y b enteros positivos tales que $4ab-1$ divide a $(4a^2-1)^2$. Demostrar que $a = b$.

Problema 6. Sea n un entero positivo. Se considera

$$S = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, \ x + y + z > 0\}$$

como un conjunto de $(n+1)^3 - 1$ puntos en el espacio tridimensional.
Determinar el menor número posible de planos cuya unión contiene todos los puntos de S pero no incluye a $(0, 0, 0)$.

La tabla siguiente recoge las frecuencias de puntuaciones por problema:

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
0 ptos	175	147	436	51	210	473
1 pto	13	181	42	30	155	40
2 ptos	8	26	23	9	38	2
3 ptos	105	15	11	9	10	0
4 ptos	18	5	3	3	3	0
5 ptos	18	1	1	4	4	0
6 ptos	21	8	2	50	6	0
7 ptos	162	136	2	363	94	5

Y las medias:

media por problema	3,4	2,5	0,31	5,67	1,9	0,15
media España	2,2	1,17	0	3,83	1,67	0

Los problemas 1 y 4, propuestos por la República Checa y por Nueva Zelanda respectivamente, eran, en efecto, los más asequibles de toda la lista corta, en la que había mayor posibilidad de elección para los problemas difíciles. Desde luego lo eran los elegidos como número 3, propuesta rusa, y 6, de los Países Bajos. Por último, los dos problemas considerados medios provenían de Luxemburgo y del Reino Unido.

En su conjunto, la prueba resultó tan difícil como para que ningún estudiante resolviera los seis problemas, lo que no ocurría desde 1999, cuando la IMO se celebró en Bucarest. La puntuación más alta, 37 puntos, fué obtenida por el ruso Konstantin Matveev. Y el equipo de Rusia ha resultado el ganador, batiendo a China, en esa extraoficial pero inevitable clasificación de países. Los cortes para las medallas de oro, plata y bronce se fijaron en los 29, 21 y 14 puntos respectivamente. Adrián Rodrigo y Diego Arseguet, ambos con 16 puntos, obtuvieron Medalla de Bronce, y Gabriel Furstenheim Mención de Honor, al ser calificado con siete puntos en el problema 4. Puede encontrarse más información sobre resultados en la recién estrenada página oficial de la IMO: `www.imo-official.org`.

Durante el acto de entrega de premios, celebrado el día 31 de julio y presidido por el Presidente de la República vietnamita, la representación española realizó la presentación e invitación oficial a la 49 Olimpíada Internacional de Matemáticas, que se celebrará en Madrid entre los días 10 y 22 de julio de 2008.

La Delegación española en Vietnam

Resultados globales:

País	**Ptos**	**O**	**P**	**B**	**MH**
Albania	59	0	0	1	5
Alemania	132	1	3	1	1
Arabia Saudita	5	0	0	0	0
Argentina	75	0	1	1	3
Armenia	73	0	1	1	3
Australia	110	0	1	4	1
Austria	80	0	1	3	0
Azerbaiyán	69	0	0	3	1
Bangladesh	31	0	0	0	3
Bélgica	78	0	0	3	2
Bielorrusia	119	1	1	4	0
Bolivia	2	0	0	0	0
Bosnia Herzegovina	69	0	1	0	5
Brasil	106	0	2	3	1
Bulgaria	149	2	3	1	0
Camboya	26	0	0	0	3
Canadá	98	0	1	3	1
Rep. Checa	82	0	0	5	1
Chile	4	0	0	0	0
China	181	4	2	0	0
Chipre	41	0	0	0	2
Colombia	93	0	1	3	1
Corea	168	2	4	0	0
Rep. Popular de Corea	151	1	4	0	1
Costa Rica	36	0	0	1	1
Croacia	76	0	0	2	4
Cuba	16	0	0	1	0
Dinamarca	50	0	0	1	3
Ecuador	34	0	0	1	2
EEUU	155	2	3	1	0
El Salvador	34	0	0	0	3
Eslovaquia	86	0	0	4	2
Eslovenia	85	0	0	5	1
España	48	0	0	2	1
Estonia	64	0	0	1	4
Filipinas	21	0	0	0	1
Finlandia	55	0	1	0	2
Francia	79	1	0	2	0

País	Ptos	O	P	B	MH
Georgia	102	1	1	1	3
Grecia	89	0	1	3	2
Hong Kong	143	0	5	1	0
Hungría	129	0	5	0	1
India	103	0	3	0	3
Indonesia	69	0	1	0	4
Irán	143	1	3	2	0
Irlanda	51	0	0	1	3
Islandia	35	0	0	0	1
Israel	71	0	0	3	3
Italia	116	1	1	3	1
Japón	154	2	4	0	0
Kazjastán	95	0	1	3	2
Kirguistán	43	0	0	1	3
Letonia	58	0	0	0	4
Liechtenstein	14	0	0	1	0
Lituania	92	0	1	2	1
Luxemburgo	34	0	0	1	2
Macao	73	0	1	1	4
Macedonia	68	0	0	3	1
Malasia	34	0	0	1	2
Marruecos	28	0	0	0	2
Méjico	86	0	0	4	2
Moldavia	118	0	3	2	0
Mongolia	88	0	2	1	2
Montenegro	17	0	0	0	1
Nigeria	20	0	0	0	1
Noruega	79	0	1	1	1
Nueva Zelanda	71	0	0	3	2
Países Bajos	65	0	0	1	3
Pakistán	32	0	0	1	1
Paraguay	32	0	0	0	3
Perú	91	0	1	2	3
Polonia	122	1	2	2	0
Portugal	52	0	0	1	1
Puerto Rico	7	0	0	0	0
Reino Unido	95	1	0	3	2
Rumanía	146	1	4	1	0
Rusia	184	5	1	0	0

País	Ptos	O	P	B	MH
Serbia	107	1	0	4	0
Singapur	87	0	0	5	0
Sri Lanka	25	0	0	0	1
Sudáfrica	42	0	0	0	4
Suecia	81	0	0	4	2
Suiza	59	0	0	1	3
Taiwán	149	2	3	1	0
Tailandia	133	1	3	2	0
Tayikistán	37	0	0	1	2
Trinidad y Tobago	39	0	0	0	4
Turkmenistán	51	0	0	0	5
Turquía	124	1	2	2	1
Ucrania	154	3	1	2	0
Uzbequistán	88	0	1	3	2
Venezuela	14	0	0	0	1
Vietnam	168	3	3	0	0

Logo de la 49 IMO, Madrid 10-22 de julio de 2008