Isometrías en el Plano Hiperbólico. Estudio mediante puntos fijos

por

Domingo Gámez, Miguel Pasadas, Rafael Pérez y Ceferino Ruiz

1. Introducción

La aparición en el siglo XIX de la Geometría Hiperbólica dio origen a nuevas e importantes ramas de las Matemáticas, pero su implicación más significativa es que obligó a los matemáticos a revisar radicalmente la comprensión de la naturaleza de las Matemáticas y su relación con el mundo físico. La Geometría Hiperbólica fue la culminación de una larga serie de esfuerzos en el área de la Geometría Euclídea y surge a raiz del análisis e interpretación del V Postulado de Euclides: *Con respecto a un punto A y una recta r que no pase por A no hay más de una recta que pasa por A, en el plano Ar que no corta a r.*

Lobatchevski en 1826, aceptó como hipótesis la aserción contraria al V Postulado de Euclides. Tomando esta proposición condicionalmente como axioma y después de añadir los restantes postulados de la Geometría Absoluta, analizó las consecuencias esperando llegar a una contradicción. Sin embargo como tal contradicción no se detectaba, obtuvo dos conclusiones: La primera es que el V Postulado no se puede demostrar a partir de los demás postulados, es decir es independiente del resto, y la segunda es que sobre la base de la afirmación opuesta se puede desarrollar una nueva geometría completamente lógica, tan rica y perfecta como la de Euclides de Alejandría (325-265 a.C.), a pesar de que sus resultados están en desacuerdo con la imagen intuitiva del espacio. Todo esto implicaba un resultado general de enorme importancia: *Existe más de una geometría lógicamente concebible.* Así ésta debe ser desarrollada no sólo como un esquema lógico arbitrario, sino como una teoría que abra nuevos caminos y métodos para las teorías físicas, no olvidemos, por ejemplo, la vital importancia que tuvo dicha geometría en la teoría de la relatividad.

Casi al mismo tiempo que Nicolai Ivanovich Lobatchevski (1793-1856), Janos Bolyai (1802-1860) y anteriormente Carl Friedrich Gauss (1777-1855) llegaron al mismo resultado. Posteriormente, Henri Poincaré (1854-1912) desarrolla modelos concretos para esta Geometría.

Aparte del progreso intelectual y avance en el conocimiento humano que supuso la introducción de la Geometría Hiperbólica, al romper con las ideas más naturales de la Geometría Euclídea, ésta influyó de modo decisivo en el desarrollo posterior de la Lógica Matemática y en el nacimiento de la Topología; aparte de en la propia Geometría. En la primera, al revelar la importancia que

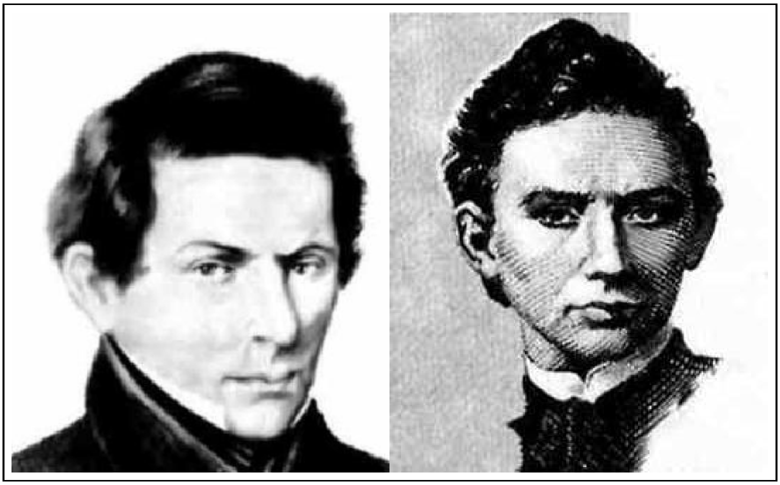

Figura 1: N. I. Lobachevsky y J. Bolyai

tiene el desarrollo de un sistema axiomático del conocimiento matemático, lejos de los errores conceptuales que pueden producir las ideas intuitivas. La existencia de dos Geometrías diferentes basadas en axiomas incompatibles era un hecho, aunque aparentemente contradictorio, irrefutable.

La imposibilidad de discernir entre la veracidad o falsedad de dos proposiciones incompatibles, hizo expandirse a la Lógica tradicional de Aristóteles (384-322 a.C.) hasta la denominada Lógica Matemática o Lógica Simbólica, construida por Fredrich Lugwig Gottlob Frege (1848-1925), la cual pretendía dominar todo el razonamiento matemático. Esta evolución muy influenciada por las ideas y trabajos de Beltrand Russell (1872-1970), alcanzó su punto álgido con los resultados de Kurt Gödel (1906-1978) sobre la incompletitud del sistema axiomático de la Aritmética. Los trabajos de Gödel, en torno a 1935, supusieron un punto final al intento unificador de David Hilbert (1862-1943) de dar un sistema completo y consistente de axiomas para la Matemática en general, y para la Geometría en particular.

En la segunda, al salir la Geometría de los espacios ambiente usales, recobra rango de veracidad el estudio sistemático de espacios abstractos, no necesariamente dotados de una estructura geométrica lineal. Fueron estas ideas las que permitieron a Poincaré introducir su *Analysis situs* que fue el precursor de la actual Topología. Más concretamente, Poincaré fundamentó sobre unas bases completas y rigurosas, la idea de conexión en una serie de artículos publicados en 1895, generalizando el concepto de recta que une dos puntos, al de pares de puntos unidos por arcos.

El objetivo fundamental de este trabajo es realizar una clasificación sistemática de las isometrías en el plano hiperbólico según sus puntos fijos, incluyendo de forma original, los casos límite. Esto nos permite obtener, de un modo sistemático, constructivo y clarificador, resultados sobre la descomposición de isometrías como producto de reflexiones. Posteriormente obtenemos una caracterización de todos y cada uno de los elementos de las isometrías en los dos modelos de Poincaré del plano hiperbólico: el semiplano superior abierto denotado por H^2 y el disco unidad abierto denotado por D^2. Aunque la mayoría de los resultados son clásicos, debemos resaltar la aportación que se realiza respecto de los casos límite anteriormente citados (Proposición 6), así como de los métodos de demostración utilizados en la exposición de los diferentes resultados.

Las demostraciones que se presentan, en su mayoría hacen uso de recursos elementales que permiten que el contenido del artículo sea adecuado para la docencia en una licenciatura de Matemáticas. Algunas de estas demostraciones se omiten y pueden consultarse en [7]. Para una mayor comprensión de este trabajo se han documentado sus contenidos con diferentes gráficas construidas con una herramienta de dibujo que hemos creado utilizando el software *Mathematica*, incluido en un *package* que llamamos `hyperbol` (*software* disponible en `http://www.ugr.es/local/ruiz/software.htm`), la cual está constituida por una serie de módulos con los que se puede realizar cualquier isometría, así como distintas construcciones geométricas en los dos modelos de Poincaré del plano hiperbólico. Esta herramienta ha sido necesaria no sólo para visualizar situaciones y propiedades del plano hiperbólico sino también fundamentalmente, para estudiar y sintetizar problemas constructivos en el mismo ([4], [5], [6] y [7]).

2. Modelos del plano hiperbólico y sus isometrías

Antes de entrar en materia veamos una serie de conceptos y resultados, necesarios para el posterior desarrollo de este trabajo. Consideremos el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$, y sea $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

Dada una curva (diferenciable) $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^+$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, se define la longitud hiperbólica de α mediante la expresión:

$$\operatorname{long}(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt = \int_\alpha \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$$

Proposición 1 ([10, Teorema 5.3.1]) *Dada la transformación de Möbius* $g : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^+$ *definida por* $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *con* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *y* $ad - bc = 1$, *para toda curva* α *se verifica que* $\operatorname{long}(g \circ \alpha) = \operatorname{long}(\alpha)$.

Definimos en $\mathbb{C}^+$ la métrica $ds = \dfrac{|dz|}{\operatorname{Im} z}\cdot$ A $\mathbb{C}^+$ con dicha métrica lo denotamos por H^2 que es un modelo del plano hiperbólico y se le denomina semiplano de Poincaré.

Por la proposición anterior, se deduce directamente que las transformaciones de Möbius $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad-bc = 1$, son isometrías en H^2

PROPOSICIÓN 2 ([7, Sección 1.3.2]) *Las rectas (geodésicas) de H^2 son: las semicircunferencias euclídeas con centro en la frontera de H^2, que corresponden a la parametrización: $x(t) = r\cos t + k_1$, $y(t) = r\,sent$, $t \in (0,\pi)$, y las semirrectas euclídeas ortogonales a dicha frontera que corresponden a la parametrización: $x(t) = k_2$, $y(t) = t$, $t \in \mathbb{R}^+$.*

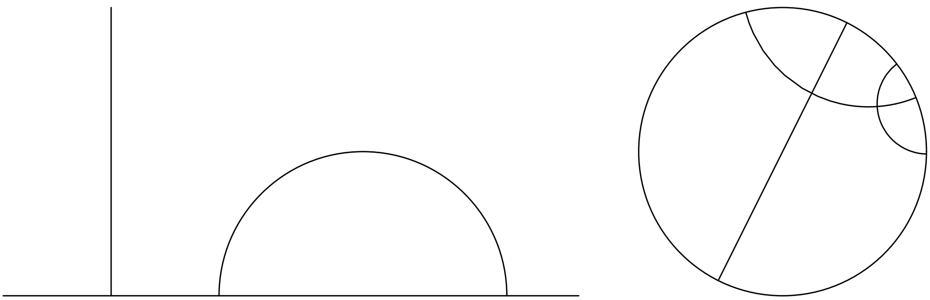

Figura 2: Rectas del plano hiperbólico para los modelos de Poincaré

Otro modelo del plano hiperbólico dado por Poincaré es el del disco unidad abierto. Sea $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, la imagen de $\mathbb{C}^+$ por la transformación de Cayley $f_c : \mathbb{C}^+ \longrightarrow D$, definida por $f_c(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$. Mediante f_c la métrica de H^2 se transforma en $ds = 2\dfrac{|dz|}{1-|z|^2}$, para el disco unidad abierto D. Dado que f_c es una aplicación biyectiva, la métrica recién definida en D, hace de f_c una isometría entre H^2 y D con dicha métrica. Así, se define D^2 como el disco unidad D con la métrica anterior. Las rectas son las semicircunferencias euclídeas ortogonales a la frontera de D y los diámetros de D.

NOTA: Se pueden considerar otras muchas maneras de introducir el plano hiperbólico, las cuales dan lugar a nuevos modelos de esta geometría, o a otros puntos de vista de los modelos antes descritos. El lector interesado en ampliar esta perspectiva, puede encontrar en [1] una versión más geométrica e intuitiva. Para una versión en el ámbito de la Geometría de Riemann, puede consultar los textos [2] y [3]. Otro libro interesante donde se aborda esta temática es [8].

Denotamos por $Iso^+(H^2)$ al grupo de isometrías que conservan la orientación; entendiendo ésta como la orientación inducida en H^2 por la orientación habitual del plano euclídeo que lo contiene, es decir, estableciendo un sentido positivo en el recorrido de los ángulos. Las isometrías de $Iso^+(H^2)$ se denominan isometrías directas. Se demuestra que ([11])

$$Iso^+(H^2) = \left\{ g : H^2 \longrightarrow H^2 \mid g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\}.$$

Se definen a continuación los diversos tipos de movimientos de H^2 que conservan la orientación.

Una transformación elíptica o rotación es una isometría directa que deja fijo un único punto $A \in H^2$ denominado centro de la rotación.

Una transformación parabólica o rotación límite es una isometría directa que deja fijo un único punto P de la recta del infinito, denominado centro de la rotación límite.

Una transformación hiperbólica o traslación sobre una recta l, es una isometría directa que deja fijos dos puntos en la recta del infinito, que son los que se obtienen al intersecar la recta l, denominada recta de traslación, con la recta del infinito.

No definiremos más tipos de isometrías directas puesto que como probaremos más adelante, toda isometría directa o es la identidad o corresponde a uno de los tipos descritos anteriormente.

Denotamos por $SL(2,\mathbb{R})$ al conjunto:

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\}.$$

$SL(2,\mathbb{R})$ con el producto de matrices es un grupo. Podemos establecer un epimorfismo de grupos de $SL(2,\mathbb{R})$ sobre $Iso^+(H^2)$, $\zeta : SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow Iso^+(H^2)$, definido por $\zeta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{az+b}{cz+d}\cdot$ Obviamente $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ tienen la misma imagen; y las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, constituyen el núcleo de ζ.

El conjunto cociente $SL(2,\mathbb{R})/\{I,-I\}$ se denomina grupo lineal especial proyectivo, y se denota por $PSL(2,\mathbb{R})$ ([11]). Además, utilizando el primer teorema de isomorfía ([9]), se concluye que el epimorfismo ζ induce un isomorfismo $\xi : PSL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow Iso^+(H^2)$.

Se puede demostrar que las isometrías de H^2 que no conservan la orientación son la composición de las isometrías directas, con una isometría fijada que no conserve la orientación ([11]). Es usual utilizar como isometría fijada que no conserva la orientación, la reflexión sobre el eje imaginario, $h(z) = -\overline{z}$.

Hagamos notar que el comportamiento de la composición de isometrías con respecto a la orientación es similar a la *regla de los signos* para la multiplicación de números enteros.

Llamamos $Iso^-(H^2)$ al conjunto de isometrías que no conservan la orientación. Se puede comprobar que ([7]) $Iso^-(H^2)$ es el conjunto:

$$\left\{g' : H^2 \longrightarrow H^2 \mid g'(z) = \frac{a'\overline{z} + b'}{c'\overline{z} + d'}, a', b', c', d' \in \mathbb{R}, a'd' - b'c' = -1\right\}.$$

Como veremos posteriormente todas las isometrías que no conservan la orientación están incluidas en los dos tipos siguientes.

La isometría que deja fijos los puntos de una geodésica l, e intercambia las dos componentes conexas de su complemento, se denomina reflexión respecto o sobre l y se denota por σ_l ([6]).

Una reflexión sesgada de recta de reflexión l es una isometría que no conserva la orientación, que no deja ningún punto fijo en H^2 y deja fijos dos puntos en la recta del infinito, que son los que se obtienen al intersecar la recta l con la recta del infinito.

PROPOSICIÓN 3 *$Iso(H^2) = Iso^+(H^2) \overset{\bullet}{\cup} Iso^-(H^2)$, donde $\overset{\bullet}{\cup}$ denota la unión disjunta.*

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, puede establecerse un isomorfismo entre $Iso(H^2)$ y el grupo cociente del grupo de las matrices reales cuadradas de orden 2 con determinante ± 1, denotado por $\Re$, por el subgrupo $\{I, -I\}$,

$$\phi : Iso(H^2) \longrightarrow \Re/\{I, -I\},\ \phi(g) = \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

donde $g(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ cuando $g \in Iso^+(H^2)$, y $g(z) = \dfrac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$ cuando $g \in Iso^-(H^2)$.

Cada clase de equivalencia $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ está formada por dos matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix},$$

las cuales tienen igual determinante pero traza opuesta. Por tanto, definimos el determinante de $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$, como determinante de una cualquiera de las matrices de su clase, y está bien definido; mientras que llamamos traza de $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ al número real positivo $|a + d|$.

Dada una isometría $g \in Iso(H^2)$, llamamos traza de g a la traza de $\phi(g)$, que denotamos por $tr(g)$, y determinante de g al determinante de $\phi(g)$. Evidentemente el determinante de una isometría g en H^2, es $+1$ ó -1 según g conserve o invierta la orientación, respectivamente.

3. Clasificación de $Iso(H^2)$ atendiendo al estudio de puntos fijos

Si consideramos el isomorfismo natural ϕ entre $Iso(H^2)$ y $\Re/\{I, -I\}$, la conjugación de isometrías (dos isometrías g_1 y g_2 son conjugadas si existe una isometría k tal que $g_1 \circ k = k \circ g_2$) equivale mediante ϕ a la conjugación de matrices. Consecuentemente, el estudio de puntos fijos de las isometrías está estrechamente relacionado con el de los invariantes algebraicos –determinante y traza– de las correspondientes matrices, como veremos más adelante.

Puesto que dos isometrías conjugadas tienen igual número de puntos fijos, y ambas son del mismo tipo en el sentido de conservar o no la orientación, todo el estudio que realizaremos sobre los puntos fijos nos ayudará a clasificar por conjugación las isometrías de H^2.

Diremos que $z \in H^2 \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, es un punto fijo bajo una isometría $g \in Iso(H^2)$ si $g(z) = z$.

Respecto a $Iso^+(H^2)$, tendremos los puntos fijos determinados por una ecuación de la forma siguiente:

$$z = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ o equivalentemente } cz^2 + (d-a)z - b = 0. \tag{1}$$

Si llamamos $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$, por ser $ad - bc = 1$, se tiene que $\Delta = (a+d)^2 - 4 = (tr(g))^2 - 4$.

Lema 1 *Si $c = 0$ en la ecuación (1), entonces, $tr(g) = 2$ si, y sólo si, $d = a = \pm 1$.*

Demostración La condición suficiente es evidente. Para la condición necesaria basta tener en cuenta que al ser $c = 0$ y $ad - bc = 1$ se tiene que $d = \dfrac{1}{a}\cdot$ Por tanto, $tr(g) = |a+d| = \left|a + \dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{a^2+1}{|a|} = 2$. Llegamos así a la ecuación $a^2 - 2|a| + 1 = 0$ cuya solución es $a = \pm 1$.

Lema 2 *$c = 0$ en (1) si, y sólo si, g admite al punto impropio de la recta del infinito (∞) como punto fijo.*

Demostración Es suficiente escribir g como $g(z) = \dfrac{az+b}{d}$ y observar que $\lim_{z\to\infty} g(z) = \infty$.

PROPOSICIÓN 4 *Sea $g \in Iso^+(H^2)$, entonces, g es una rotación si, y sólo si, $tr(g) < 2$.*

DEMOSTRACIÓN Observemos inicialmente que $c \neq 0$, ya que si $c = 0$, entonces $ad = 1$ y $|a + d| = \left|a + \frac{1}{a}\right| = \frac{a^2+1}{|a|} \geq 2$, $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Si g es una rotación, g deja fijo un único punto en H^2, por lo que (1) ha de tener dos soluciones complejas (no reales) conjugadas, luego $|a + d| < 2$.

Recíprocamente, si $|a + d| < 2$, entonces de (1) obtenemos que $z = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{\sqrt{4-(a+d)^2}}{2c} i$, por lo que la parte imaginaria de una de las dos raices es positiva y la otra negativa, así pues g tiene un único punto fijo en H^2; es decir, g es una rotación con centro dicho punto.

Este tipo de isometría fija los elementos del haz de circunferencias euclídeas ortogonales al haz de rectas que pasan por el punto fijo z. Cada órbita por la acción de dichas transformaciones, es decir, el lugar geométrico del plano que se obtiene al aplicar a un punto dado todos los giros con un mismo centro, se llama circunferencia ([5]).

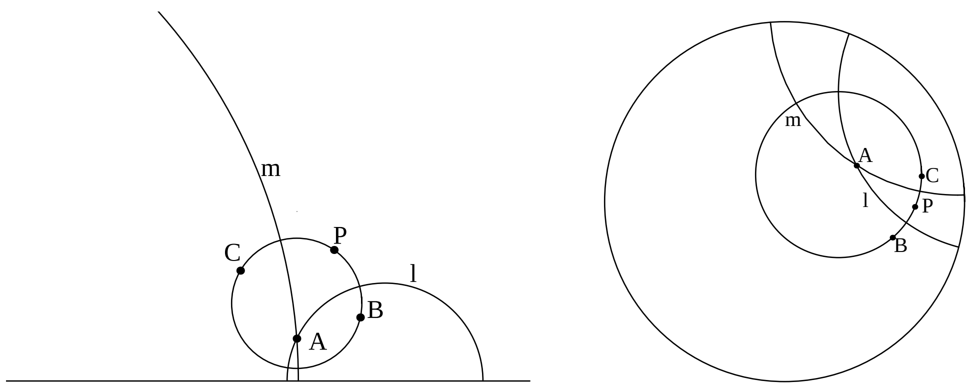

Figura 3: Circunferencias del plano hiperbólico

PROPOSICIÓN 5 *Sea $g \in Iso^+(H^2)$, entonces g es una rotación límite o la identidad si, y sólo si, $tr(g) = 2$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $c = 0$ en (1). Si $b = 0$, entonces por el Lema 1 $|a + d| = 2 \Longleftrightarrow d = a = \pm 1 \Longleftrightarrow g(z) = z;\ \ \forall z \in H^2$. Luego g es la identidad.

Si $b \neq 0$, entonces por verificarse que $ad = 1$ y por el Lema 1 tenemos que $|a+d| = 2 \Longleftrightarrow d = a = \pm 1$, o lo que es lo mismo, (1) no tiene solución en H^2, y esto equivale a decir que g no admite puntos fijos en H^2, esto es, por el Lema 2, g es una rotación límite con el punto impropio de la recta del infinito como centro.

Finalmente, si $c \neq 0$, $|a+d| = 2 \Longleftrightarrow \Delta = 0$, es decir, (1) admite una única solución $z = \dfrac{a-d}{2c} \in \mathbb{R}$ o equivalentemente, g, tiene un único punto fijo $z = \dfrac{a-d}{2c}$ en la recta del infinito, y esto es lo mismo que afirmar que g es una rotación límite con centro en dicho punto.

Las circunferencias del haz de circunferencias euclídeas que pasan por un punto propio P de la recta del infinito y tangentes a ella en P son invariantes bajo las rotaciones límite con centro en P. Las rectas euclídeas paralelas a $y = 0$, son invariantes bajo la rotaciones límite con centro en el punto impropio de la recta del infinito. Cada órbita por la acción de dichas transformaciones, entendida como el lugar geométrico que describe un punto al aplicarle las rotaciones límite con un centro fijado, se llama horociclo ([5]).

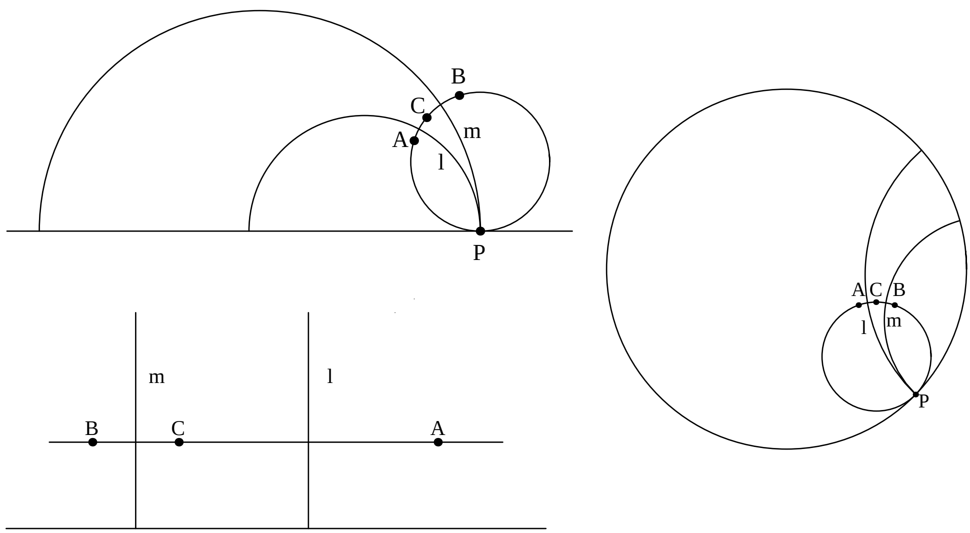

Figura 4: Horociclos del plano hiperbólico

Proposición 6 *Dados tres puntos distintos P, Q, R, en la recta del infinito, existe una única rotación límite con centro en P que transforma Q en R.*

DEMOSTRACIÓN Sean $P(p,0)$, $Q(q,0)$, y $R(r,0)$. En la situación general, basta con tomar una isometría $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con

$$a = \frac{p^2 - 2pr + qr}{(p-q)(p-r)},\ b = \frac{p^2(r-q)}{(p-q)(p-r)},$$

$$c = \frac{q-r}{(p-q)(p-r)},\ d = \frac{p^2 - 2pq + qr}{(p-q)(p-r)},$$

.

Se comprueba que tal isometría es una rotación límite con centro en P y que transforma el punto Q en R.

Mientras que si Q es el punto impropio de la recta del infinito (∞), la rotación límite viene dada por

$$a = \frac{r}{r-p},\ b = \frac{p^2}{p-r},\ c = \frac{1}{r-p},\ d = \frac{2p-r}{p-r}\cdot$$

Del mismo modo, si R es el punto impropio de la recta del infinito (∞), la rotación límite viene dada por

$$a = \frac{2p-q}{p-q},\ b = \frac{p^2}{q-p},\ c = \frac{1}{p-q},\ d = \frac{q}{q-p}\cdot$$

Por último, si P es el punto impropio de la recta del infinito (∞), la rotación límite tiene la expresión $g(z) = z - q + r$.

La unicidad de estas transformaciones está garantizada por la determinación unívoca de los coeficientes de la expresión de la rotación límite.

PROPOSICIÓN 7 *Sea $g \in Iso^+(H^2)$, entonces g es una traslación si, y sólo si, $tr(g) > 2$.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos en primer lugar que $c = 0$. Entonces $ad = 1$ y razonando como en la Proposición 4, $|a+d| \geq 2$. Por el Lema 1 $|a+d| = 2 \Longleftrightarrow d = a = \pm 1$, por lo que $|a+d| > 2$ es equivalente a afirmar que $a \neq d$.

Si g es una traslación (y $c = 0$) entonces g posee un único punto fijo propio en la recta del infinito, es decir, $(d-a)z - b = 0$ tiene una única solución real, por tanto $a \neq d$.

Recíprocamente si $a \neq d$, como $(d-a)z-b = 0$, se tiene que $z = \dfrac{b}{d-a} \in \mathbb{R}$, por lo que hay un punto fijo propio en la recta del infinito y por el Lema 2, ∞ también es fijo, por lo que se trata de una traslación sobre la recta $x = \dfrac{b}{d-a}$.

Si $c \neq 0$, tenemos las siguientes equivalencias: g es una traslación si, y sólo si, g deja dos puntos fijos en la recta del infinito o lo que es lo mismo, (1) tiene dos soluciones reales; equivalentemente, $\Delta > 0 \Longleftrightarrow |a+d| > 2$.

Evidentemente, las dos soluciones reales de (1) son los puntos propios intersección de la recta de traslación con la recta del infinito.

Los elementos del haz de circunferencias euclídeas que pasan por los dos puntos propios fijos de la recta del infinito o las semirrectas euclídeas con origen en el punto $\left(\dfrac{b}{d-a}, 0\right)$, son invariantes bajo las traslaciones según la recta que tiene tales puntos en la recta del infinito. La órbita de un punto, como lugar geométrico del plano formado por las imagenes de tal punto por la acción de dichas transformaciones, se llama hiperciclo ([5]).

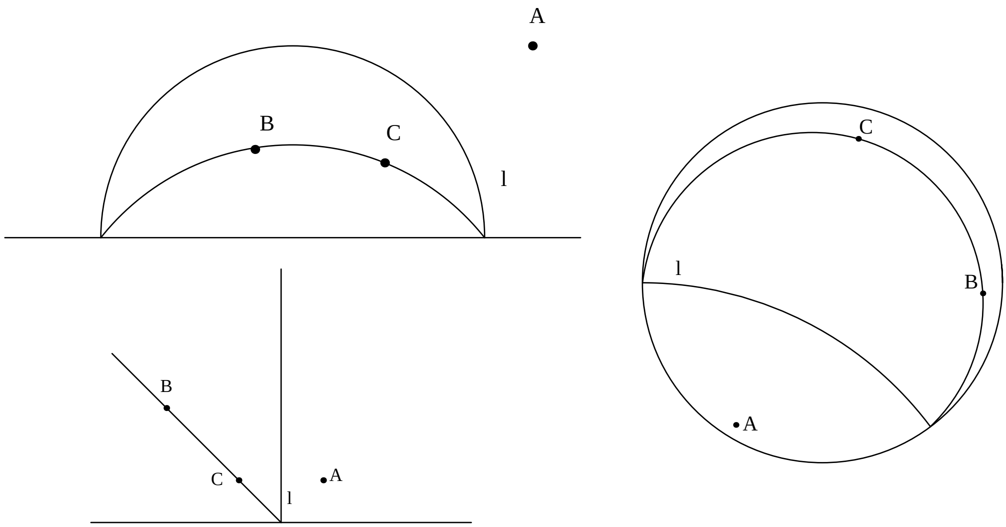

Figura 5: Hiperciclos del plano hiperbólico

Respecto a $Iso^{-}(H^2)$, tendremos:

$$z = \frac{a'\overline{z} + b'}{c'\overline{z} + d'} \text{ o equivalentemente } c'z\overline{z} + d'z - a'\overline{z} - b' = 0. \tag{2}$$

Hagamos notar que el conjunto de puntos z que satisfacen la condición anterior es un lugar geométrico en el plano $\mathbb{C}$. El estudio de dicho lugar será la base de análisis para cada uno de los casos que siguen. Por lo tanto, conviene indicar que a diferencia con el caso de las isometrías directas, haremos un análisis de los casos posibles basándonos en consideraciones de carácter geométrico y no meramente algebraicas.

LEMA 3 *Sea $g' \in Iso^-(H^2)$, si g' tiene un punto fijo en H^2 entonces $tr(g') = 0$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $z = (x, y) \in H^2$ un punto fijo para g'. Por (2) se tiene que

$$c'(x^2 + y^2) + x(d' - a') - b' + y(d' + a')i = 0.$$

En particular $y(d' + a') = 0$ y como $y \neq 0$, se tiene que $|a' + d'| = 0$.

PROPOSICIÓN 8 *Si $g' \in Iso^-(H^2)$, entonces g' es una reflexión si, y sólo si, $tr(g') = 0$.*

DEMOSTRACIÓN La condición necesaria es evidente por el Lema 3. Para la condición suficiente, partimos de que $a' = -d'$. Si $c' = 0$, (2) se reduce a la igualdad $2\mathrm{Re}(z)d' = b'$, por lo que tenemos una recta de puntos fijos, $x = \dfrac{b'}{2d'}$. Se trata, por tanto, de una reflexión sobre dicha recta.

Si $c' \neq 0$, como $|a' + d'| = 0$, el lugar geométrico (2) es una circunferencia euclídea en $\mathbb{C}$ y tanto z como $\overline{z}$ pertenecen a dicho lugar geométrico; luego el centro ha de estar en un punto propio de la recta del infinito y esta semicircunferencia euclídea del semiplano $\mathbb{C}^+$ es una recta en H^2. Así pues, g' deja fijos los puntos de la recta de ecuación (2), por lo que g' es una reflexión con la recta como eje.

PROPOSICIÓN 9 *Si $g' \in Iso^-(H^2)$, entonces g' es una reflexión sesgada si, y sólo si, $tr(g') \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que g' es una reflexión sesgada, entonces (2) tiene una o dos raices y además están en la recta del infinito. Luego $|a' + d'| \neq 0$ ya que si $|a' + d'| = 0$ entonces por la Proposición anterior la ecuación (2) tendría infinitas soluciones.

Recíprocamente, supongamos que $|a' + d'| \neq 0$. Consideremos en primer lugar que $c' = 0$. Si $z = (x, y)$ es fijo, ha de satisfacer que $(d' - a')x - b' = 0$ y $(d' + a')y = 0$. Por tanto, el punto $(\dfrac{b'}{d' - a'}, 0)$, también es fijo para todo b', (obsérvese que como $a'd' = -1$ es $a' \neq d'$). Así pues, la recta de ecuación $x = \dfrac{b'}{d' - a'}$ es globalmente invariante ya que para $g'(z) = \dfrac{a'\overline{z} + b'}{d'}$ es $g'(\dfrac{b'}{d' - a'}, y_1) = (\dfrac{b'}{d' - a'}, \dfrac{1}{d'^2}y_1)$. Luego, g' es una reflexión sesgada.

Consideremos ahora $c' \neq 0$. Sea $z = (x, y)$ un punto que cumple (2), entonces, $(c'(x^2 + y^2), 0) + (d'x, d'y) + (-a'x, a'y) + (-b', 0) = (0, 0)$ si, y sólo si,

$$\begin{cases} c'(x^2 + y^2) + x(d' - a') - b' = 0 \\ \\ (d' + a')y = 0. \end{cases}$$

Si ponemos la primera ecuación como $x^2 + y^2 + \dfrac{d' - a'}{c'}x - \dfrac{b'}{c'} = 0$, vemos que es la ecuación de una circunferencia euclídea de centro $\left(\dfrac{-d' + a'}{2c'}, 0\right)$ y radio $r = \sqrt{\left(\dfrac{a' - d'}{2c'}\right)^2 + \dfrac{b'}{c'}}$.

Nótese que el radicando es positivo, puesto que,

$$\left(\frac{a' - d'}{2c'}\right)^2 > -\frac{b'}{c'} \Longleftrightarrow (a' - d')^2 > -4b'c' \Longleftrightarrow (a' + d')^2 > 4(a'd' - b'c') = -4.$$

Luego

$$c'(x^2 + y^2) + x(d' - a') - b' = 0 \tag{3}$$

es una circunferencia euclídea cuyo centro está en un punto propio de la recta del infinito. Por otro lado, $(d' + a')y = 0$, y como $a' + d' \neq 0$, entonces $y = 0$.

Luego (2) es la intersección de una circunferencia euclídea con centro en un punto propio de la recta del infinito y la recta del infinito, con lo que tenemos dos puntos fijos en $\mathbb{R}$ para cada g', cuya recta (3), es la semicircunferencia euclídea del semiplano superior que para g' es globalmente invariante, transformándose en ella misma ya que si $z = (x, y)$ pertenece a la recta (3), se tiene que $g'(z) = \dfrac{a'\overline{z} + b'}{c'\overline{z} + d'}$ puede escribirse como:

$$g'(z) = \frac{(a'x + b')(c'x + d') + c'a'y^2}{(c'x + d')^2 + c'^2y^2} + \frac{c'y(a'x + b') - a'y(c'x + d')}{(c'x + d')^2 + c'^2y^2}\, i$$

y también pertenece a (3), pues sustituyendo en (3) x por $\mathrm{Re}(g'(z))$ e y por $\mathrm{Im}(g'(z))$, y teniendo en cuenta que $a'd' - b'c' = -1$, se llega a la expresión

$$-\frac{c'(x^2 + y^2) + x(d' - a') - b'}{c'^2(x^2 + y^2) + 2c'd'x + d'^2}$$

que claramente es cero por (3). Por tanto g' es una reflexión sesgada.

De las dos proposiciones anteriores, se deduce la siguiente caracterización de las reflexiones.

Corolario 1 *Sea $g' \in Iso^-(H^2)$, entonces g' es una reflexión si, y sólo si, g' tiene al menos un punto fijo en H^2.*

4. DESCOMPOSICIÓN DE LAS ISOMETRIAS DE H^2 EN PRODUCTO DE REFLEXIONES

En esta sección obtenemos las isometrías de H^2 como producto de reflexiones.

PROPOSICIÓN 10 ([9]) *Las isometrías de H^2 se obtienen como el producto de, a lo sumo, tres reflexiones.*

COROLARIO 2 *Las isometrías de H^2 que conservan la orientación son el producto de dos reflexiones.*

DEMOSTRACIÓN Como toda isometría puede descomponerse en producto de menos de cuatro reflexiones y este número ha de ser par por conservar la orientación, necesariamente las isometrías que conservan la orientación pueden descomponerse en el producto de dos reflexiones.

PROPOSICIÓN 11 *Sea $g \in Iso^+(H^2)$, entonces, g es un giro con centro en $A \in H^2$ si, y sólo si, existen dos reflexiones σ_m y σ_l respecto a dos rectas m y l distintas que pasan por A tal que $g = \sigma_m \sigma_l$.*

LEMA 4 *Sea* $\mathrm{Fix}(g)$ *el conjunto de puntos fijos de la isometría g, entonces para toda isometría h, se verifica que* $\mathrm{Fix}(hgh^{-1}) = h(\mathrm{Fix}(g))$.

DEMOSTRACIÓN Sea P un punto fijo de g, al aplicar hgh^{-1} al punto $h(P)$ tenemos que: $hgh^{-1}(h(P)) = hg(h^{-1}h(P)) = hg(P) = h(g(P)) = h(P)$, por lo que $h(\mathrm{Fix}(g)) \subseteq \mathrm{Fix}(hgh^{-1})$. Aplicando h^{-1} a ambos lados de la inclusión, y la misma propiedad para el elemento h^{-1} y el conjunto $\mathrm{Fix}(hgh^{-1})$, se tiene que $h^{-1}(h(\mathrm{Fix}(g))) = \mathrm{Fix}(g) \subseteq h^{-1}(\mathrm{Fix}(hgh^{-1})) \subseteq \mathrm{Fix}(h^{-1}hgh^{-1}h) = \mathrm{Fix}(g)$. Por tanto, todos los inclusiones son igualdades y, concluimos que $h(\mathrm{Fix}(g)) = \mathrm{Fix}(hgh^{-1})$.

El Lema anterior pone de manifiesto que la clasificación de las isometrías según el conjunto de sus puntos fijos, es invariante por conjugación respecto de cualquier isometría de H^2.

Utilizando el lema anterior, la Proposición 6 y la conjugación, se demuestra la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 12 *Sea $g \in Iso^+(H^2)$, $g \neq 1_{H^2}$, entonces, g es una rotación límite con centro en un punto P de la recta del infinito si, y sólo si, existen dos reflexiones σ_m y σ_l sobre dos rectas distintas y asintóticas en P tal que $g = \sigma_m \sigma_l$.*

Proposición 13 *Sea $g \in Iso^+(H^2)$, entonces, g es una traslación sobre una recta l si, y sólo si, existen dos reflexiones σ_m y σ_n respecto de dos rectas distintas y ortogonales a l tal que $g = \sigma_m \sigma_n$.*

Haciendo uso del concepto de mediatriz de un segmento y del Corolario 1, se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 14 *Sea $g' \in Iso^-(H^2)$, entonces, g' es una reflexión sesgada de recta de reflexión l si, y sólo si, existe una traslación g según l tal que $g' = g\sigma_l$.*

5. Expresión de las isometrías de D^2

Basándose en el conocimiento de las isometrías de H^2 y el hecho de que f_c es una isometría, vamos a determinar las isometrías de D^2.

Observamos que $h \in Iso(D^2)$ si y sólo si existe $j \in Iso(H^2)$ tal que $f_c \circ j = h \circ f_c$, es decir, si el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} H^2 & \xrightarrow{j} & H^2 \\ \Big\downarrow f_c & & \Big\downarrow f_c \\ D^2 & \xrightarrow{h} & D^2 \end{array}$$

Nótese que mediante la commutatividad del diagrama se puede definir de forma natural un isomorfismo entre $Iso(H^2)$ e $Iso(D^2)$.

Motivados por este hecho, realizamos la siguiente definición.

Definición 1 *Diremos que una isometría s de D^2 es directa, cuando exista $g \in Iso^+(H^2)$ tal que $f_c \circ g = s \circ f_c$.*

Al conjunto de isometrías directas de D^2 se le notará por $Iso^+(D^2)$.

Proposición 15 *El conjunto $Iso^+(D^2)$ viene dado por*

$$Iso^+(D^2) = \left\{ s : D^2 \longrightarrow D^2 \mid s(z) = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1 \right\}$$

Demostración Consideremos una isometría directa cualquiera en el disco D^2, $s \in Iso^+(D^2)$, y sea $g \in Iso^+(H^2)$, de la forma $g(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, con $ad - bc = 1$, tal que $f_c \circ g = s \circ f_c$.

Si llamamos w a $f_c(z)$, entonces $z = f_c^{-1}(w) = \dfrac{-i(w+1)}{w-1}$. Así:

$$s(w) = (f_c \circ g \circ f_c^{-1})(w) = \frac{\alpha w + \overline{\beta}}{\beta w + \overline{\alpha}}$$

donde $\alpha = \frac{1}{2}(a + d + i(b - c))$, $\beta = \frac{1}{2}(a - d + i(b + c))$, con $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1$.

Recíprocamente, si $s : D^2 \longrightarrow D^2$ está definida como $s(z) = \dfrac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}$ y $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1$, entonces $s \in Iso^+(D^2)$, ya que existe $g \in Iso^+(H^2)$ con $g(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ y $ad - bc = 1$, siendo, $a = \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta$, $b = \operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\beta$, $c = -\operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\beta$, $d = \operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\beta$, de forma que $s = f_c \circ g \circ f_c^{-1}$.

De igual forma, vamos a definir y describir las isometrías de D^2 que no conservan la orientación.

DEFINICIÓN 2 *Diremos que una isometría t de D^2 no conserva la orientación cuando exista $g' \in Iso^-(H^2)$ tal que $f_c \circ g' = t \circ f_c$.*

Al conjunto de isometrías que no conservan la orientación se le notará por $Iso^-(D^2)$.

PROPOSICIÓN 16 *El conjunto $Iso^-(D^2)$ viene dado por*

$$Iso^-(D^2) = \left\{ t : D^2 \longrightarrow D^2 \mid t(z) = \frac{\gamma\overline{z} + \overline{\delta}}{\delta\overline{z} + \overline{\gamma}}; \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \gamma\overline{\gamma} - \delta\overline{\delta} = 1 \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN Sea una isometría cualquiera $t \in Iso^-(D^2)$ y

$$g' \in Iso^-(H^2),\ g'(z) = \frac{a'\overline{z} + b'}{c'\overline{z} + d'} \text{ con } a'd' - b'c' = -1$$

tal que $f_c \circ g' = t \circ f_c$.

Entonces:

$$t(w) = (f_c \circ g' \circ f_c^{-1})(w) = \frac{\gamma\overline{w} + \overline{\delta}}{\delta\overline{w} + \overline{\gamma}}$$

siendo $\gamma = \frac{1}{2}(-a' + d' + i(b' + c'))$, $\delta = \frac{1}{2}(-a' - d' + i(b' - c'))$, con $\gamma\overline{\gamma} - \delta\overline{\delta} = 1$.

Recíprocamente, si $t : D^2 \longrightarrow D^2$, $t(z) = \dfrac{\gamma\overline{z} + \overline{\delta}}{\delta\overline{z} + \overline{\gamma}}$ y $\gamma\overline{\gamma} - \delta\overline{\delta} = 1$, entonces $t \in Iso^-(D^2)$ ya que existe $g' \in Iso^-(H^2)$, $g'(z) = \dfrac{a'\overline{z} + b'}{c'\overline{z} + d'}$, con $a'd' - b'c' = -1$, siendo $a' = -\operatorname{Re}\gamma - \operatorname{Re}\delta$, $b' = \operatorname{Im}\gamma + \operatorname{Im}\delta$, $c' = \operatorname{Im}\gamma - \operatorname{Im}\delta$, $d' = \operatorname{Re}\gamma - \operatorname{Re}\delta$, tal que $t = f_c \circ g' \circ f_c^{-1}$.

PROPOSICIÓN 17 $Iso(D^2) = Iso^+(D^2) \overset{\bullet}{\cup} Iso^-(D^2)$.

6. Clasificación de $Iso(D^2)$ atendiendo al estudio de puntos fijos

En esta sección hacemos un estudio de las isometrías de D^2 atendiendo a los puntos fijos.

Sea $h \in Iso(D^2)$ y $j \in Iso(H^2)$ tal que $f_c \circ j = h \circ f_c$, entonces el conjunto de puntos fijos bajo la acción de h es:

$$\mathrm{Fix}(h) = \{f_c(f_c^{-1}(z)) \mid f_c^{-1}(z) \text{ es punto fijo de } j\} = f_c(\mathrm{Fix}(j)).$$

Pasemos a estudiar $Iso^+(D^2)$. Basándonos en la Proposición 15 se tiene que, $|a+d| = |\alpha + \overline{\alpha}| = 2\,|\mathrm{Re}\,\alpha|$. Por tanto de este hecho y de los resultados de la Sección 3 se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1 *Sea $s \in Iso^+(D^2)$, entonces:*

1.- *s es una rotación si, y sólo si,* $|\mathrm{Re}\,\alpha| < 1$.

2.- *s es una rotación límite o la identidad si, y sólo si,* $|\mathrm{Re}\,\alpha| = 1$.

3.- *s es una traslación si, y sólo si,* $|\mathrm{Re}\,\alpha| > 1$.

El estudio para $Iso^-(D^2)$ es completamente análogo. Basándonos en la Proposición 16 se tiene que, $|a' + d'| = |-2\mathrm{Re}\,\delta| = 2\,|\mathrm{Re}\,\delta|$. De este hecho y de la Sección 3, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2 *Sea $t \in Iso^-(D^2)$, entonces:*

1.- *t es una reflexión si, y sólo si,* $\mathrm{Re}\,\delta = 0$.

2.- *t es una reflexión sesgada si, y sólo si,* $\mathrm{Re}\,\delta \neq 0$.

Referencias

[1] M. Berger, *Géométrie.* Vols. 1-5, CEDIC/Fernand Nathan. Paris, 1979.

[2] W.M. Boothby; *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press. New York, 1986.

[3] M.P. Do Carmo; *Geometría diferencial de curvas y superficies.* Alianza Universidad Textos, 135, Alianza Edit. Madrid, 1990.

[4] D. Gámez, M. Pasadas, R. Pérez. y C. Ruiz; *Regla y compas hiperbólicos electrónicos para teselar.* Proccedings del I Encuentro de Matemáticos Andaluces, Sevilla 2000, (2001) Vol. 2, 467-474.

[5] D. Gámez, M. Pasadas, R. Pérez. y C. Ruiz; *Orbits in the hyperbolic plane.* Monografías del Seminario Matemático García Galdeano, VII Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada y Estadística. Jaca 2001, (2003), 297–305.

[6] D. GÁMEZ, M. PASADAS, R. PÉREZ. Y C. RUIZ; *The Lambert quadrilateral and tesselations in the hyperbolic plane.* Int. Math. J. **2** (2002), nº 8, 777-795.

[7] D. GÁMEZ; *Construcciones en geometría hiperbólica y teselaciones mediante grupos NEC poligonales. Algoritmos de automatización.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada, 2001.

[8] J. GRAY; *Ideas de espacio.* Biblioteca Mondadori, 33, Mondadori. Madrid, 1992.

[9] B. IVERSEN; *Hyperbolic geometry.* Cambridge University Press. Cambridge, 1992.

[10] G.A. JONES Y D. SINGERMAN; *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press. Cambridge, 1988.

[11] W. MAGNUS; *Non euclidean tesselations and their groups.* Academic Press. New York, 1974.

[12] J.G. RATCLIFE; *Foundations of hyperbolic manifolds.* Springer Verlag. New York, 1994. Vol. 149.

Domingo Gámez Domingo
Miguel Pasadas Fernández
Rafael Pérez Gómez
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada
E-18071 Granada
Correo electrónico: domingo@ugr.es
mpasadas@ugr.es
rperez@ugr.es

Ceferino Ruiz Garrido
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
E-18071 Granada
Correo electrónico: ruiz@ugr.es