

## Límites utilizando coordenadas polares

por

Juan Bosco Ferreiro Darriba y Óscar López Pouso

Se demuestran varios resultados en relación con el límite cuando  $(x, y)$  tiende a  $(a, b)$  de una función real de dos variables reales  $f(x, y)$ . Se presta especial atención al uso de las coordenadas polares para calcular dicho límite. Los resultados se acompañan con ejemplos.

### 1. INTRODUCCIÓN

Este artículo está dedicado al estudio del límite de una función real de dos variables reales  $f(x, y)$ . Además de la relación con los conceptos de continuidad y diferenciabilidad, y en consecuencia con el concepto de plano tangente a una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , hay una conexión entre este tema y la derivada de una función compleja de una variable compleja  $f(z)$ . En el último caso, dado  $z_0 \in \mathbb{C}$ , la derivada (en el sentido complejo) de  $f$  en  $z_0$  se define como sigue [3]:

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad (1)$$

en caso de que el límite exista en  $\mathbb{C}$ . Si  $h_1$  y  $h_2$  son, respectivamente, la parte real e imaginaria de  $h$ , el límite en (1) puede calcularse calculando los límites, cuando  $(h_1, h_2)$  tiende a  $(0, 0)$ , de las partes real e imaginaria del cociente  $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ , que son dos límites que entran en el marco de nuestro estudio.

Para tener una idea de lo que estamos hablando, consideremos el siguiente ejemplo estudiado en [5]:

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Los autores de [5] afirman que, puesto que se sabe por cálculo elemental que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{sen } s}{s} = 1, \quad (3)$$

entonces 1 es el candidato a ser el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$ , y después demuestran esa conjetura utilizando la definición *épsilon-delta de límite*. Entre otras cosas, los resultados que recogemos en este artículo nos permiten afirmar que, ciertamente, los límites en (2) y en (3) son equivalentes,

con lo cual la última parte del razonamiento es innecesaria. Para otras situaciones que pueden ser tratadas con los resultados del artículo remitimos al lector a los ejemplos de las secciones 2, 3 y 4.

El lector debe estar familiarizado con la definición épsilon–delta de límite, así como con los conceptos de punto de acumulación, conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$  y conjunto compacto en  $\mathbb{R}$ .

En la sección 2 se explican algunos hechos relacionados con el uso de límites sobre subconjuntos y límites iterados; el primer tema, aunque sobradamente conocido, puede ayudar al lector a entender ciertos puntos clave cuando se estudia el límite usando coordenadas polares; el segundo tema ha sido incluido por motivos de completitud. La sección 3 está dedicada a otras formas de resolver el problema, y en ella enunciamos el teorema de compactación de variables, que puede usarse, por ejemplo, para resolver el límite (2). En la sección 4 explicamos con la ayuda de ejemplos concretos de qué manera el cambio a coordenadas polares puede ser de gran ayuda en el cálculo de límites. En la sección 5 enunciamos y demostramos los resultados matemáticos.

La utilidad de este trabajo reside, a juicio de los autores, en la escritura detallada de los resultados recogidos en el Teorema 1, Teorema 2 y sus corolarios, y Teorema 5. Todos ellos, excepto quizá el último, serán de una u otra forma familiares para muchos lectores, especialmente para aquellos profesores que hayan tenido que explicar en sus cursos esta materia. La condición (b) en el Teorema 2 suele aparecer solamente como una condición suficiente, aunque es fácil demostrar que también es necesaria. En ninguna referencia bibliográfica hemos visto un resultado análogo al Teorema 5, quizá porque no reduce el número de variables; es sin embargo útil en ciertas ocasiones, como se muestra en los ejemplos. Por último, aconsejamos al lector que escriba todos los resultados en el caso en que el dominio de  $f(x, y)$  es todo  $\mathbb{R}^2$ , lo cual ayudará a librarse de notaciones incómodas y a entender mejor la idea matemática subyacente. Nosotros hemos creído que en este artículo conviene escribirlos en el caso general en el que el dominio de  $f(x, y)$  puede ser un subconjunto arbitrario de  $\mathbb{R}^2$ .

## 2. LÍMITES SOBRE SUBCONJUNTOS. LÍMITES ITERADOS

### 2.1 LÍMITES SOBRE SUBCONJUNTOS

Pensemos en el siguiente ejemplo: para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , definimos

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad (4)$$

e investigamos los valores  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  está cerca de  $(0, 0)$ . El problema es más difícil que en el caso de una variable (i. e., el límite de una función real de una variable real  $f(x)$ ) por los motivos siguientes:

- En primer lugar, la regla de L'Hôpital no es aplicable.
- En segundo lugar, el estudio del límite no puede reducirse al estudio de los límites laterales por la derecha y por la izquierda.

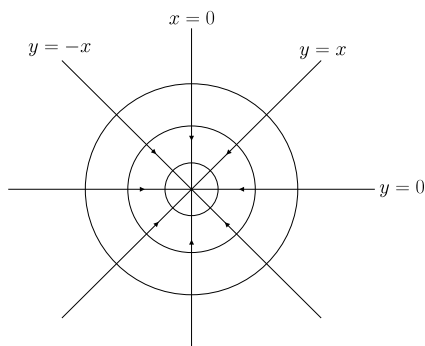


Figura 1: Hay infinitas rectas aproximándose a  $(0, 0)$ .

Es cierto, sin embargo, que para cada línea recta que pase por  $(0, 0)$  tenemos la misma situación que en una variable, ya que podemos acercarnos al punto desde dos lados: “derecha” e “izquierda”. Esto puede observarse con claridad en la Figura 1. En este momento, es natural pensar del modo siguiente: si bien el número de líneas rectas que se acercan a  $(0, 0)$  es infinito, es posible tratarlas de modo simultáneo, porque todas ellas son de ecuación  $y = mx$ , donde  $m \in \mathbb{R}$  es la pendiente (excepto el eje  $y$ , cuya ecuación es  $x = 0$ ). Si  $x = 0$ , i. e., si el punto  $(x, y)$  está sobre el eje  $y$ , entonces

$$f(x, y) = f(0, y) = \frac{0}{y^4} = 0. \quad (5)$$

Si  $y = mx$ , entonces

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{xm^2x^2}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}, \quad (6)$$

que tiende a 0, para cualquier pendiente  $m$ , cuando  $x$  tiende a 0. Lo que hemos hecho es lo que se conoce como el estudio de los *límites direccionales*, es decir, de los límites a lo largo de todas las posibles rectas que se acercan a  $(0, 0)$ . En este ejemplo, todos los límites direccionales toman el mismo valor 0; este hecho hace pensar que el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  debe ser 0, pero es bien sabido que para que el límite exista es en general insuficiente que existan y valgan lo mismo todos los límites direccionales; en efecto, es posible aproximarse a  $(0, 0)$  sobre subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  distintos de

rectas, como parábolas o cualquier otro tipo de subconjunto que podamos imaginar, sobre los cuales el límite pudiera no ser 0. El ejemplo anterior ha sido elegido para que el “fallo” se produzca sobre la parábola  $x = y^2$ :

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}, \quad (7)$$

y por tanto existen puntos  $(y^2, y)$  tan próximos a  $(0, 0)$  como deseemos en los que  $f$  toma el valor  $\frac{1}{2}$ . La discusión anterior puede resumirse en las siguientes fórmulas:

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x=y^2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ no existe.} \quad (11)$$

Una función tan extraña tiene una extraña gráfica cerca de origen, y vale la pena observarla en la Figura 2.

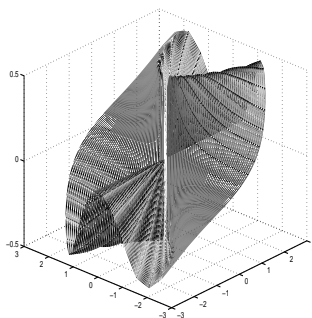


Figura 2: Gráfica de la función  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ .

El ejemplo anterior nos ayuda a entender los siguientes hechos generales:

- Si hay un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  aproximándose a  $(0, 0)$  (puede ser una recta o una parábola, pero también cualquier otra curva que pase por o que se aproxime a  $(0, 0)$ , o un conjunto numerable de puntos –una sucesión– que se aproxime a  $(0, 0)$ ) tal que el límite de  $f(x, y)$  sobre los

puntos de  $S$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  no exista, entonces el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  no existe.

- Si hay dos subconjuntos  $S_1$  y  $S_2$  tales que los límites sobre  $S_1$  y sobre  $S_2$  existen pero no son iguales, entonces el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  no existe.
- Puede muy bien suceder que todos los límites direccionales existan y tomen un valor común, pero que el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  no exista.
- En caso de que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  exista y valga  $L$ , entonces el límite de  $f(x, y)$  sobre cualquier subconjunto  $S$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  existe y es igual a  $L$ . Naturalmente, esto implica lo dicho en los puntos primero y segundo.

## 2.2 LÍMITES ITERADOS

Hay otra forma natural de encarar el problema: si el límite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \quad (12)$$

es difícil, podemos estudiar los llamados *límites iterados*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)), \quad \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)), \quad (13)$$

que son más fáciles de calcular, puesto que en cada caso el problema es simplemente el cálculo de dos límites de una variable (luego podemos usar la regla de L'Hôpital si es preciso). Desafortunadamente, los límites iterados nos proporcionan poca información acerca del comportamiento de  $f(x, y)$  cerca de  $(0, 0)$ . En efecto, consideremos el límite iterado

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)). \quad (14)$$

Para obtener su valor, calculamos  $\lim_{x \rightarrow 0} L(x)$ , siendo, para cada  $x$ ,

$$L(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y), \quad (15)$$

que puede no tener nada que ver con los valores de  $f(x, y)$  en  $y = 0$ . Pero incluso en el caso más favorable de que  $L(x) = f(x, 0)$ , estaríamos calculando simplemente un límite direccional. Puede enunciarse, sin embargo, el siguiente hecho general:

- Si los dos límites iterados existen y son distintos, entonces el límite no existe.

El ejemplo (ver gráfica en la Figura 3)

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

muestra que los límites iterados pueden existir y ser iguales, en tanto que el límite no existe. El ejemplo (ver gráfica en la Figura 4)

$$f(x, y) = (x + y) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{y}\right) \quad (17)$$

ilustra la situación, más extraña, en la cual el límite existe (en este caso el lector debe saber que el producto de una función que tiende a cero por otra acotada también tiende a cero) aun cuando ninguno de los límites iterados existe (ya que la función “cos” oscila y no se aproxima a ningún valor concreto en el infinito).

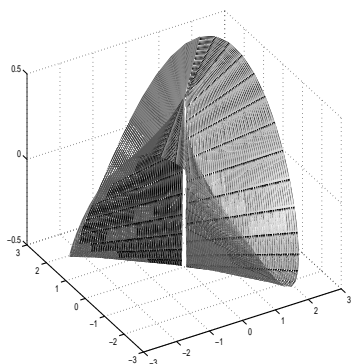


Fig. 3: Gráfica de la función

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

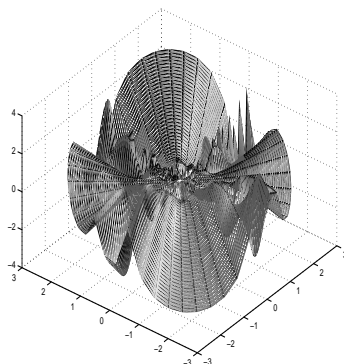


Fig. 4: Gráfica de la función

$$f(x, y) = (x + y) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{y}\right)$$

### 3. MÁS SOBRE LÍMITES EN DOS VARIABLES

#### 3.1 UNA DESIGUALDAD ÚTIL Y LA REGLA DEL SANDWICH

En ciertos casos particulares, otras buenas ideas pueden servir para calcular el límite. Una desigualdad particularmente útil es la siguiente:

$$2|xy| \leq x^2 + y^2, \quad (18)$$

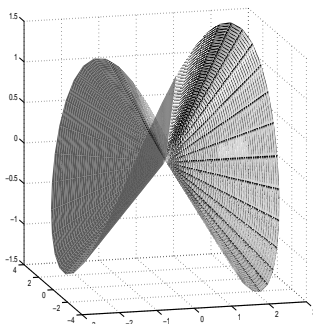


Figura 5: Gráfica de la función  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

que se cumple para todo  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}$ . La demostración de (18) es fácil:  $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 \geq 0$  y  $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$ . El uso de esta desigualdad se ilustra con el ejemplo

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{19}$$

Como

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, \tag{20}$$

el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  es 0, en virtud de la *regla del sandwich*. La gráfica de la función  $f(x, y)$  se muestra en la Figura 5.

### 3.2 COMPACTACIÓN DE VARIABLES

Consideremos ahora otro ejemplo de interés. Si

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x + y)}{x + y}, \tag{21}$$

para  $x \neq -y$  (ver gráfica en la Figura 6), entonces parece natural pensar que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\text{sen}(x + y)}{x + y} = 1, \tag{22}$$

ya que sabemos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{sen } s}{s} = 1. \tag{23}$$

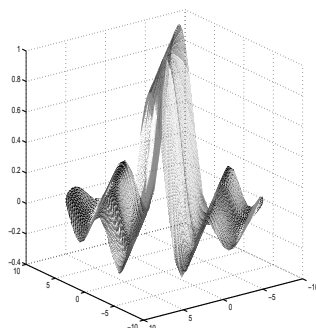


Figura 6: Gráfica de la función  $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y}$ .

Pero, ¿es matemáticamente correcto proceder de este modo? Quizá sí lo es (ciertamente en este caso lo es), pero entonces debemos probar por qué. En efecto, en general

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \psi(x, y) = \bar{\psi} \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow \bar{\psi}} g(s) = L \quad (24)$$

no implican

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(\psi(x, y)) = L, \quad (25)$$

como muestra el contraejemplo siguiente:

$$g(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 0, \\ 0 & \text{si } s \neq 0, \end{cases} \quad (26)$$

$$\psi(x, y) = x + y. \quad (27)$$

Entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \psi(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0} g(s) = 0, \quad (28)$$

pero

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} g(\psi(x, y)) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=-x}} g(\psi(x, y)) = 1, \quad (29)$$

y consecuentemente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(\psi(x, y)) \quad \text{no existe.} \quad (30)$$



Surge así la cuestión de cuándo podemos *compactar variables* y reemplazar  $\psi(x, y)$  por  $s$  y  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  por  $s \rightarrow \bar{\psi}$  en (25). Desde luego, si

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \psi(x, y) = \bar{\psi} \in \mathbb{R} \tag{31}$$

y  $g$  es continua en  $\bar{\psi}$ , se cumple

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(\psi(x, y)) = g(\bar{\psi}) \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

Por lo tanto, si definimos

$$\psi(x, y) = x + y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{33}$$

y

$$g(s) = \frac{\text{sen } s}{s} \quad \text{si } s \neq 0, \quad g(0) = 1, \tag{34}$$

que es continua en virtud de (23), se tiene

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\text{sen}(x + y)}{x + y} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(\psi(x, y)) = g(0) = 1. \tag{35}$$

Un razonamiento completamente análogo prueba que el límite de la función definida en (2) puede calcularse simplemente calculando el límite (3).

Cuando se elimina la hipótesis de continuidad de  $g$  en  $\bar{\psi}$ , se tiene el siguiente teorema, cuya prueba, aunque sencilla, posponemos hasta la última sección. En él,  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ,  $B((a, b), \delta^*)$  denota la bola abierta en  $\mathbb{R}^2$  de centro  $(a, b)$  y radio  $\delta^*$ , y se asume implícitamente que  $(a, b)$  es un punto de acumulación del dominio de  $f$ ,  $A$ .

TEOREMA 1 (compactación de variables) *Supongamos que*

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

*es de la forma  $f(x, y) = g(\psi(x, y))$ , donde*

$$\psi : \text{Dom}(\psi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad y \quad g : \text{Dom}(g) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

*(Obviamente, debe ser  $A \subset \text{Dom}(\psi)$  y  $\psi(A) \subset \text{Dom}(g)$ .)*

*Se cumplen:*

*(a) Supongamos que*

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \psi(x, y) = \bar{\psi} \in \{-\infty, +\infty\}.$$

*Entonces, para  $L \in \bar{\mathbb{R}}$ , se cumple la implicación*

$$\lim_{s \rightarrow \bar{\psi}} g(s) = L \quad \implies \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L.$$

(b) Supongamos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \psi(x,y) = \bar{\psi} \in \mathbb{R}$$

y que existe  $\delta^* > 0$  tal que

$$\psi(x,y) \neq \bar{\psi} \quad \forall (x,y) \in (A \cap B((a,b), \delta^*)) \setminus \{(a,b)\}. \quad (36)$$

Entonces, para  $L \in \bar{\mathbb{R}}$ , se cumple la implicación

$$\lim_{s \rightarrow \bar{\psi}} g(s) = L \quad \implies \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L.$$

NOTA 1 En el contraejemplo dado antes, la condición (36) no se satisface.

El Teorema 1 también puede aplicarse al ejemplo (22): tenemos

$$\psi(x,y) = x + y, \quad \bar{\psi} = 0, \quad (37)$$

$$g(s) = \frac{\text{sen } s}{s}, \quad L = 1, \quad (38)$$

y  $\psi(x,y) \neq 0$  para todo  $(x,y)$  tal que  $x \neq -y$  (es decir, para todo  $(x,y)$  en el dominio de  $f = g(\psi)$ ). Así pues, y de acuerdo con el Teorema 1, podemos compactar variables y afirmar que (23) implica (22). Como antes, un razonamiento análogo demuestra que para calcular el límite de la función definida en (2) basta calcular el límite (3).

Hacemos notar que el Teorema 1 admite una formulación más general en el marco de límites de funciones definidas entre espacios topológicos. En efecto, se cumple la siguiente proposición; su demostración, que aquí omitimos, es un sencillo ejercicio para aquellos lectores familiarizados con los conceptos básicos de la Topología (ver por ejemplo [1]).

PROPOSICIÓN 1 Sean

$$\psi : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow Z$$

dos aplicaciones, donde  $X, Y, Z$  son espacios topológicos no vacíos, con  $Y, Z$  Hausdorff. Si  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$  y  $z_0 \in Z$  son tales que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0,$$

y además existe un entorno abierto de  $x_0$  en  $X$ ,  $\mathcal{U}$ , tal que

$$\psi(\mathcal{U} \setminus \{x_0\}) \subset Y \setminus \{y_0\},$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(\psi(x)) = z_0.$$

## 3.3 DESARROLLOS DE TAYLOR

Tenemos a nuestra disposición al menos otra forma de calcular el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y}. \quad (39)$$

En efecto, notemos que, dado  $s \in \mathbb{R}$ , un *desarrollo de Taylor* de la función seno centrado en 0 (o sea, un *desarrollo de Maclaurin*) de tres términos más el resto proporciona la igualdad

$$\text{sen } s = \text{sen } 0 + (\cos 0)s - \frac{1}{2}(\text{sen } 0)s^2 - \frac{1}{6}(\cos \xi)s^3 = s - \frac{1}{6}(\cos \xi)s^3, \quad (40)$$

para cierto  $\xi$  situado estrictamente entre 0 y  $s$  cuando  $s \neq 0$ .

Consecuentemente, para  $(x, y)$  tal que  $x + y \neq 0$ ,

$$\frac{\text{sen}(x+y)}{x+y} = \frac{x+y - \frac{1}{6}(\cos \xi)(x+y)^3}{x+y} = 1 - \frac{1}{6}(\cos \xi)(x+y)^2, \quad (41)$$

donde  $\xi$  es un cierto número entre 0 y  $x + y$ . A la vista de (41) es claro que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y} = 1. \quad (42)$$

## 4. COORDENADAS POLARES

La ubicación de un punto dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  está unívocamente determinada por la distancia  $\rho$  del punto al origen y el ángulo  $\theta$  (pronúnciese *zeta*) entre el semieje  $x$  positivo y la semirrecta que parte del origen y pasa por el punto (en este momento debemos tomar una decisión: nosotros elegimos el ángulo  $\theta$  en  $[0, 2\pi)$  y medido en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj). Las cantidades  $\rho$  y  $\theta$  son las *coordenadas polares* del punto  $(x, y)$ . El lector puede encontrar información interesante acerca del origen de las coordenadas polares en las referencias [2] y [4].

Las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  pueden recuperarse a partir de las polares mediante las relaciones

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (43)$$

Entonces es posible expresar los valores de una función  $f(x, y)$  como los valores de la siguiente función de las coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ :

$$F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \quad (44)$$

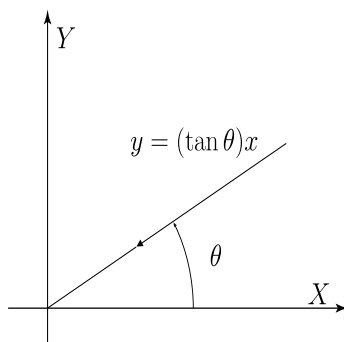


Figura 7: Si fijamos  $\theta$  y hacemos tender  $\rho$  a 0, nos aproximamos a  $(0, 0)$  a lo largo de una semirrecta.

Puesto que  $\rho$  es la distancia del punto al origen, podemos aproximarnos a  $(0, 0)$  tomando el límite cuando  $\rho$  tiende a 0. Así, a primera vista, parece que el estudio de

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \quad (45)$$

se reduce al estudio de

$$\lim_{\rho \downarrow 0} F(\rho, \theta) \quad \text{para todos los posibles valores de } \theta. \quad (46)$$

Sin embargo, es muy importante notar que, para un valor fijo del ángulo  $\theta$ , hacer el límite de  $F(\rho, \theta)$  cuando  $\rho$  tiende a 0 es equivalente a hacer el *límite direccional* de  $f(x, y)$  sobre la semirrecta determinada por el ángulo  $\theta$  (que, dejando aparte casos especiales, es la parte de la recta de ecuación  $y = (\tan \theta)x$  contenida en el cuadrante al que pertenece el ángulo  $\theta$ , como se ilustra en la Figura 7) y, en consecuencia, el estudio de (46) *no es otra cosa que el estudio de los límites direccionales*; como ya sabemos, el límite (45) puede no existir aun cuando todos los límites direccionales coincidan.

Como ejemplo del uso de las coordenadas polares para calcular límites direccionales, consideremos, para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$f(x, y) = \arccos \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \quad (47)$$

Cambiando a coordenadas polares como se explica más arriba obtenemos, cuando  $\theta \in [0, \pi]$ ,

$$F(\rho, \theta) = \arccos \left( \frac{\rho \cos \theta}{\rho} \right) = \theta \quad (48)$$

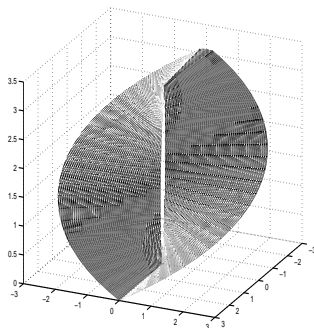


Figura 8: Gráfica de la función  $f(x, y) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ .

(es  $2\pi - \theta$  si  $\theta \in (\pi, 2\pi)$ ), y es trivial calcular, para  $\theta \in [0, \pi]$  fijo, el límite direccional

$$\lim_{\rho \downarrow 0} F(\rho, \theta) = \theta. \quad (49)$$

Como este límite depende de  $\theta$ , el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  no existe. En la Figura 8 puede verse la gráfica de  $f(x, y)$ .

Tras esta discusión, cabe preguntarse si vale la pena malgastar nuestro tiempo en el estudio de límites usando coordenadas polares, habida cuenta de que el estudio de los límites direccionales empleando coordenadas cartesianas no es, en general, difícil. Aparte de la razón de que en algunos casos, como en el ejemplo anterior, los límites direccionales son más fáciles de calcular usando coordenadas polares, existe la posibilidad de que las coordenadas polares simplifiquen el problema de tal forma que el cálculo del límite se convierta en una cuestión trivial; por ejemplo, parece claro (y además es cierto) que si  $f(x, y)$  toma valores constantes sobre circunferencias centradas en  $(0, 0)$  (o sea, un valor constante sobre cada circunferencia), entonces el límite puede reducirse a un límite de una variable; en coordenadas polares este hecho puede reformularse diciendo que si  $F(\rho, \theta)$  depende solamente de  $\rho$  (i. e.,  $F(\rho, \theta) = F(\rho)$ ) entonces el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  es simplemente el límite de  $F(\rho)$  cuando  $\rho$  tiende a 0 (ver Corolario 1 en la sección 5).

Consideremos, como ejemplo, la función

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^2})}, \quad (50)$$

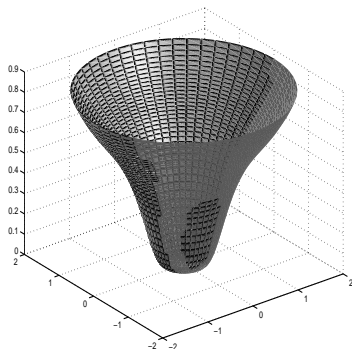


Figura 9: Gráfica de la función  $f(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\text{sen}(\sqrt{x^2+y^2})}$ .

definida para aquellos  $(x, y)$  tales que  $\text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2}) \neq 0$ . La gráfica de esta función se muestra en la Figura 9. En este caso,

$$F(\rho, \theta) = F(\rho) = \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\text{sen } \rho}, \quad (51)$$

de modo que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \downarrow 0} F(\rho) = 0. \quad (52)$$

Nótese que, utilizando el razonamiento anterior, podríamos calcular también el límite de la función definida en (2).

Consideremos ahora una situación general en la que  $F(\rho, \theta)$  puede depender a la vez de  $\rho$  y de  $\theta$ .

Notemos que, cuando  $\theta$  está fijo, entonces  $F(\rho, \theta)$  nos da cuando  $\rho$  varía los valores de  $f(x, y)$  sobre la semirrecta determinada por  $\theta$ , y que, cuando  $\rho$  está fijo,  $F(\rho, \theta)$  nos da cuando  $\theta$  varía los valores de  $f(x, y)$  sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . La última afirmación invita a pensar (y además es cierto, ver Teorema 2 en la sección 5) que, si  $L \in \mathbb{R}$  y existe una función  $H$  dependiente solo de  $\rho$  tal que

$$|F(\rho, \theta) - L| \leq H(\rho) \quad \text{para todos los posibles valores de } \theta \quad (53)$$

y  $\lim_{\rho \downarrow 0} H(\rho) = 0$ , entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L. \quad (54)$$

(Podríamos preguntarnos qué valor  $L$  debemos poner en (53); tenemos un único candidato: el valor común de los límites direccionales.) Ilustramos esta idea con el ejemplo siguiente: consideremos, para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (55)$$

Entonces

$$F(\rho, \theta) = \frac{\rho^2 \cos \theta \sen \theta}{\rho} = \rho \cos \theta \sen \theta, \quad (56)$$

y, como

$$|F(\rho, \theta)| \leq \frac{1}{2}\rho \quad \text{para todos los posibles valores de } \theta, \quad (57)$$

concluimos que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0. \quad (58)$$

La gráfica de  $f(x, y)$  se mostró en la Figura 5.

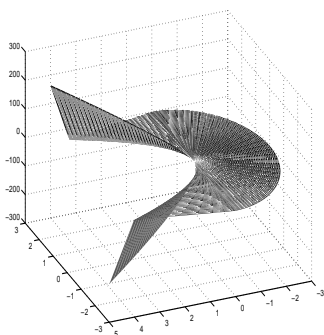


Figura 10: Gráfica de la función  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

Observamos otra aplicación útil de las coordenadas polares en el estudio de la función

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad (59)$$

definida para aquellos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tales que  $y < x^2$  (ver gráfica en la Figura 10). En este caso

$$F(\rho, \theta) = \rho^{\frac{3}{2}} \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\rho \cos^2 \theta - \operatorname{sen} \theta}}, \quad (60)$$

y todos los límites direccionales toman el valor común 0.

En esta circunstancia, una, y solo una, de las afirmaciones siguientes es cierta: o bien el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  existe y es 0, o bien el límite no existe. No parece que el límite sea 0, porque, tan cerca de  $(0, 0)$  como decidamos, podemos elegir puntos  $(x, y)$  tales que  $y$  se aproxima a  $x^2$  mientras que el producto  $xy$  no se acerca a 0, y por lo tanto el cociente  $\frac{xy}{\sqrt{x^2-y}}$  tiende a infinito. Expliquemos ahora esta idea por medio de las coordenadas polares; en primer lugar notemos que la circunferencia de radio  $\rho$  y centro  $(0, 0)$  tiene dos puntos de intersección con la parábola  $y = x^2$ , cuyas coordenadas polares son

$$(\rho, \theta_1), \quad (\rho, \theta_2), \quad (61)$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son las soluciones en  $[0, 2\pi)$  de

$$\rho \cos^2 \theta - \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (62)$$

(que es la ecuación polar de la parábola).

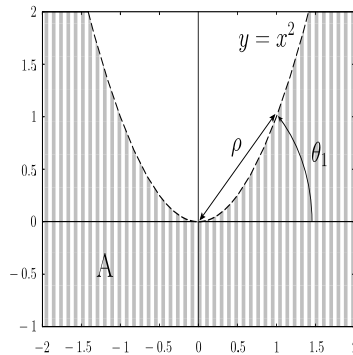


Figura 11:  $A$  es el dominio de la función  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2-y}}$ .

Geoméricamente es claro que uno de los ángulos, digamos  $\theta_1$ , pertenece a  $(0, \frac{\pi}{2})$  (ver Figura 11), y que el otro pertenece a  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

Como

$$\lim_{\theta \uparrow \theta_1} F(\rho, \theta) = +\infty, \quad (63)$$



y como esto puede hacerse para cualquier valor de  $\rho$ , el límite de  $f(x, y)$  cuando  $f(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  no puede existir. En un lenguaje matemático más formal, podríamos decir que el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  no puede ser ningún número real, ya que  $f(x, y)$  *no está localmente acotada en  $(0, 0)$* .

En este momento debe estar claro que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = L \tag{64}$$

(siendo  $L \in \bar{\mathbb{R}}$ ) implica

$$\lim_{\rho \downarrow 0} F(\rho, \theta) = L \quad \text{para todos los posibles valores de } \theta, \tag{65}$$

pero que el recíproco no es cierto. Podríamos preguntarnos si (64) también implica (ver Figura 12)

$$\lim_{(\rho, \theta) \rightarrow (0, \bar{\theta})} F(\rho, \theta) = L \quad \text{para todos los posibles valores de } \bar{\theta}, \tag{66}$$

y si la condición (66), siendo más fuerte que (65), es suficiente para que se cumpla (64). Quizá sorprenda a algunos lectores el hecho de que las condiciones (64) y (66) son equivalentes, pero en efecto lo son, básicamente como consecuencia de la compacidad de  $[0, 2\pi]$  (ver Teorema 5 en la sección 5).

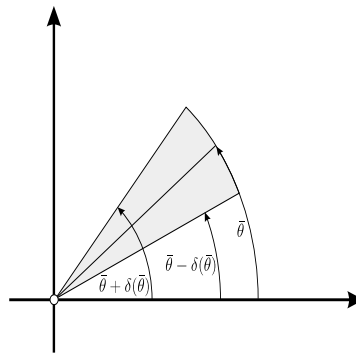


Figura 12: Dado  $\bar{\theta}$ , en (66) analizamos los valores de  $f(x, y)$  para aquellos  $(x, y)$  de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , con  $\rho$  cerca de 0 y  $\theta$  cerca de  $\bar{\theta}$ .

Así, hemos logrado establecer una condición necesaria y suficiente para (64) en el caso más general. Como ejemplo en el cual la condición (66) resuelve el problema, consideremos la función (ver gráfica en la Figura 13)

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\text{sen}(x^2 + y^2)[x^2 y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}]}, \tag{67}$$

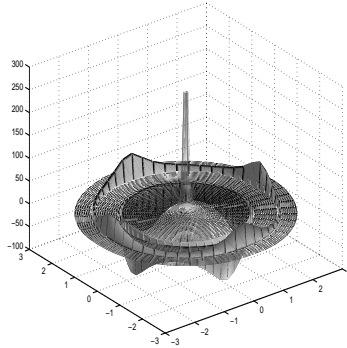


Figura 13: Gráfica de la función  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sin(x^2 + y^2)[x^2 y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}]}$ .

definida para aquellos  $(x, y)$  tales que  $\sin(x^2 + y^2) \neq 0$ .

Entonces

$$F(\rho, \theta) = \frac{1}{\sin(\rho^2)[\rho^3(\cos \theta)^2(\sin \theta)^2 + 1]}, \quad (68)$$

y es claro que

$$\lim_{(\rho, \theta) \rightarrow (0, \bar{\theta})} F(\rho, \theta) = +\infty \quad \text{para todo } \bar{\theta} \in [0, 2\pi], \quad (69)$$

De ahí, en virtud de la equivalencia entre (64) y (66), se concluye que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = +\infty. \quad (70)$$

Consideremos ahora, como una segunda aplicación de la condición (66), el ejemplo

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}. \quad (71)$$

Recuérdese que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  no existe (ver Figura 2). Ahora

$$F(\rho, \theta) = \frac{\rho \cos \theta (\sin \theta)^2}{(\cos \theta)^2 + \rho^2 (\sin \theta)^4}, \quad (72)$$

y

$$\lim_{(\rho, \theta) \rightarrow (0, \bar{\theta})} F(\rho, \theta) = 0 \quad \text{para todo } \bar{\theta} \in [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \quad (73)$$

Pero se comprueba sin dificultad que

$$\lim_{\substack{(\rho, \theta) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2}) \\ \theta = \arccos \rho}} F(\rho, \theta) = \lim_{\rho \downarrow 0} F(\rho, \arccos \rho) = \frac{1}{2}, \quad (74)$$

y por tanto

$$\lim_{(\rho, \theta) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})} F(\rho, \theta) \neq 0 \quad (75)$$

(en realidad este límite no existe), lo que implica, de acuerdo con la equivalencia entre (64) y (66), que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  no existe.

## 5. TEOREMAS Y DEMOSTRACIONES

En esta sección recogemos y demostramos los resultados que tienen que ver con el uso de las coordenadas polares. Damos también una prueba del Teorema 1 (de compactación de variables).

Queremos hacer énfasis en que esta sección no es un ejercicio de futilidad, sino que permite fijar las ideas expuestas hasta el momento. Además, la precisión que el lector puede encontrar aquí no está del todo cubierta con las explicaciones dadas en la sección anterior.

Usamos las notaciones siguientes:  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ,  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , y  $W'$  es el conjunto de puntos de acumulación de  $W$ .

Recordemos que, dado  $W \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  es un punto de acumulación de  $W$  si

$$[(a - \epsilon, a + \epsilon) \setminus \{a\}] \cap W \neq \emptyset \quad \text{para todo } \epsilon > 0. \quad (76)$$

Análogamente, dado  $W \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  es un punto de acumulación de  $W$  si

$$[B((a, b), \epsilon) \setminus \{(a, b)\}] \cap W \neq \emptyset \quad \text{para todo } \epsilon > 0, \quad (77)$$

donde

$$B((a, b), \epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| < \epsilon\}. \quad (78)$$

Esto significa que todo entorno de  $a$  (resp.,  $(a, b)$ ) contiene infinitos puntos distintos de  $W$ .

Todas las demostraciones se basan en la definición épsilon-delta de límite.

## 5.1 LA DEFINICIÓN ÉPSILON-DELTA DE LÍMITE

Consideremos una función  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (i. e.,  $A$  es el *dominio* de  $f$ ), con  $A$  tal que  $A'$  es no vacío, y  $(a, b)$  un punto de acumulación de  $A$ . Entonces, si  $L \in \mathbb{R}$ , se dice que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \quad (79)$$

en caso de que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ [0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta, (x,y) \in A] \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon. \quad (80)$$

Se dice que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = +\infty \quad (81)$$

en caso de que

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ [0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta, (x,y) \in A] \Rightarrow f(x,y) > M. \quad (82)$$

Se dice que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = -\infty \quad (83)$$

en caso de que

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ [0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta, (x,y) \in A] \Rightarrow f(x,y) < -M. \quad (84)$$

## 5.2 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 (COMPACTACIÓN DE VARIABLES)

Hacemos la prueba para  $\bar{\psi}, L \in \mathbb{R}$ , aunque alguno de ellos o ambos pueden ser  $\pm\infty$ . Fijemos  $\epsilon > 0$ .

Sabemos que existe  $\delta > 0$  tal que

$$[0 < |s - \bar{\psi}| < \delta, s \in \psi(A)] \Rightarrow |g(s) - L| < \epsilon. \quad (85)$$

Tomemos  $\delta'$  tal que

$$[0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta', (x,y) \in A] \Rightarrow |\psi(x,y) - \bar{\psi}| < \delta. \quad (86)$$

Como podemos elegir  $\delta' < \delta^*$ , tenemos

$$[0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta', (x,y) \in A] \Rightarrow 0 < |\psi(x,y) - \bar{\psi}| < \delta. \quad (87)$$

Ahora, de (85) y (87) se sigue que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta' > 0 : [0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta', (x, y) \in A] \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon, \quad (88)$$

es decir,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L, \quad (89)$$

como se quería demostrar. ■

#### COORDENADAS POLARES. TEOREMAS

Como antes, consideramos una función  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $A$  tal que  $A'$  es no vacío), un punto de acumulación de  $A$  al que llamamos  $(a, b)$ , y estudiamos el límite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y). \quad (90)$$

Notemos que  $(a, b)$  no es necesariamente  $(0, 0)$ , y por lo tanto el cambio a coordenadas polares es ligeramente distinto. Debemos usar coordenadas polares centradas en  $(a, b)$ , lo cual se hace tomando  $\rho > 0$  y  $\theta \in [0, 2\pi)$  tales que

$$x = a + \rho \cos \theta, \quad y = b + \rho \sin \theta. \quad (91)$$

De acuerdo con esto, la función  $F$  es

$$F(\rho, \theta) = f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta). \quad (92)$$

Queremos ser precisos, y para ello necesitamos tener en cuenta el dominio de  $F$ , como ya hemos tenido en cuenta el dominio de  $f$ ,  $A$ , en la definición de límite. Con este propósito definimos la *aplicación de cambio de variable*

$$\varphi : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (93)$$

$$\varphi(\rho, \theta) = (a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta). \quad (94)$$

Es claro que

$$F(\rho, \theta) = f(\varphi(\rho, \theta)), \quad (95)$$

y en consecuencia el dominio de  $F$  es  $\varphi^{-1}(A)$ , el conjunto de aquellos pares  $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$  tales que  $\varphi(\rho, \theta) \in A$ . Llamemos

$$A^* = \varphi^{-1}(A), \quad (96)$$

de modo que  $A^*$  es el dominio de  $F$ . Es un buen ejercicio comprobar los hechos siguientes: si  $A$  es un círculo centrado en  $(a, b)$  con radio  $r$ , entonces  $A^*$  es el rectángulo  $(0, r) \times [0, 2\pi)$ ; si  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $\cos \theta \neq 0$ , entonces  $\varphi((0, +\infty) \times \{\theta\})$  es la semirrecta que tiene pendiente  $\tan \theta$  y extremo en  $(a, b)$ ; si  $\rho \in (0, +\infty)$ , entonces  $\varphi(\{\rho\} \times [0, 2\pi))$  es la circunferencia de centro  $(a, b)$  y radio  $\rho$ .

Ahora explotamos la idea de que si el máximo valor de  $|f(x, y) - L|$  sobre la circunferencia centrada en  $(a, b)$  con radio  $\rho$  tiende a 0 cuando  $\rho \downarrow 0$ , entonces debe ser

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L. \quad (97)$$

Puesto que el dominio de  $f$ ,  $A$ , es en principio un subconjunto arbitrario de  $\mathbb{R}^2$ , debemos considerar solamente los puntos que están en la intersección de esas circunferencias con  $A$ ; es decir, dado un radio  $\rho$ , el punto de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  representa un punto de  $A$  solo para ciertos valores del ángulo  $\theta$  (en algunos casos para ningún valor de  $\theta$ ). Llamamos  $T^*(\rho)$  a este conjunto de “valores válidos de  $\theta$ ”.

DEFINICIÓN 1 Para  $\rho \in (0, +\infty)$ , definimos

$$T^*(\rho) = \{\theta \in [0, 2\pi) : (\rho, \theta) \in A^*\}.$$

La Figura 14 muestra el significado geométrico de  $T^*(\rho)$  cuando  $(a, b) = (0, 0)$  y  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \|(x, y)\| \leq 1\}$ .

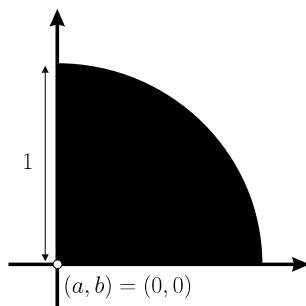


Figura 14:  $T^*(\rho) = [0, \frac{\pi}{2}]$  si  $\rho \in (0, 1]$ ;  $T^*(\rho) = \emptyset$  si  $\rho > 1$ .

En la siguiente definición, nótese que el supremo (sup) y el ínfimo (inf) siempre existen en  $\overline{\mathbb{R}}$ .

DEFINICIÓN 2 Dado  $L \in \bar{\mathbb{R}}$ ,  $G_L : (0, +\infty) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  es la función definida por:

$$\begin{aligned}
 \text{si } L \in \mathbb{R}, G_L(\rho) &= \begin{cases} 0 & \text{si } T^*(\rho) = \emptyset, \\ \sup_{\theta \in T^*(\rho)} |F(\rho, \theta) - L| & \text{si } T^*(\rho) \neq \emptyset, \end{cases} \\
 G_{+\infty}(\rho) &= \begin{cases} +\infty & \text{si } T^*(\rho) = \emptyset, \\ \inf_{\theta \in T^*(\rho)} F(\rho, \theta) & \text{si } T^*(\rho) \neq \emptyset, \end{cases} \\
 G_{-\infty}(\rho) &= \begin{cases} -\infty & \text{si } T^*(\rho) = \emptyset, \\ \sup_{\theta \in T^*(\rho)} F(\rho, \theta) & \text{si } T^*(\rho) \neq \emptyset. \end{cases}
 \end{aligned}$$

TEOREMA 2 Si  $L \in \mathbb{R}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L.$

(b) Existen  $\rho_0 > 0$  y  $H : (0, \rho_0) \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\rho \downarrow 0} H(\rho) = 0, \quad y \\
 &|F(\rho, \theta) - L| \leq H(\rho) \quad \text{para todo } (\rho, \theta) \in A^* \text{ con } \rho \in (0, \rho_0).
 \end{aligned}$$

(c)  $\lim_{\rho \downarrow 0} G_L(\rho) = 0.$

DEMOSTRACIÓN Si se cumple (a), entonces

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\
 [0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta, (x, y) \in A] \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon, \tag{98}$$

o, equivalentemente,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\
 [\rho < \delta, (\rho, \theta) \in A^*] \Rightarrow |F(\rho, \theta) - L| < \epsilon. \tag{99}$$

Nótese que (99) implica

$$\lim_{\rho \downarrow 0} H(\rho) = 0 \tag{100}$$

si definimos  $H(\rho) = G_L(\rho)$ , con lo cual (b) se satisface.

El resto de la demostración (i. e., (b)  $\Rightarrow$  (c) y (c)  $\Rightarrow$  (a)) es muy fácil y se omite. ■

NOTA 2 *El lector debería ser capaz en este momento de obtener un resultado análogo al Teorema 2 para el estudio de*

$$\lim_{|z| \uparrow +\infty} f(z) = z_0 \in \mathbb{C}, \quad (101)$$

donde  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $|z|$  es el módulo de  $z$ .

*Límites de este tipo surgen por ejemplo en la Mecánica de Fluidos. En el caso particular de que  $A$  contenga un conjunto de la forma  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}$  para cierto  $M > 0$  (por ejemplo:  $A = \mathbb{C}$ ), se obtiene que (101) equivale a la existencia de un  $\rho_0 > M$  y una función  $H : (\rho_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\lim_{\rho \uparrow +\infty} H(\rho) = 0$  y  $|F(\rho, \theta) - z_0| \leq H(\rho)$  para todo  $\rho > \rho_0$  y todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , donde  $F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta + i\rho \sin \theta)$ .*

Ahora enunciaremos dos resultados más para cubrir los casos de límites infinitos. Las demostraciones pueden hacerse siguiendo la prueba del Teorema 2.

TEOREMA 3 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = +\infty.$

(b) *Existen  $\rho_0 > 0$  y  $H : (0, \rho_0) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tales que*

$$\lim_{\rho \downarrow 0} H(\rho) = +\infty, \quad y$$

$$F(\rho, \theta) \geq H(\rho) \quad \text{para todo } (\rho, \theta) \in A^* \text{ con } \rho \in (0, \rho_0).$$

(c)  $\lim_{\rho \downarrow 0} G_{+\infty}(\rho) = +\infty.$

TEOREMA 4 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = -\infty.$

(b) *Existen  $\rho_0 > 0$  y  $H : (0, \rho_0) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  tales que*

$$\lim_{\rho \downarrow 0} H(\rho) = -\infty, \quad y$$

$$F(\rho, \theta) \leq H(\rho) \quad \text{para todo } (\rho, \theta) \in A^* \text{ con } \rho \in (0, \rho_0).$$

(c)  $\lim_{\rho \downarrow 0} G_{-\infty}(\rho) = -\infty.$

Cuando  $F$  tiene expresiones especiales, el problema puede resultar más simple. Damos ahora cuatro corolarios en esta dirección. Las demostraciones son ejercicios para el lector.



**COROLARIO 1** ( $\mathbf{F}(\rho, \theta) = \mathbf{g}(\rho)$ ) *Supongamos que existe  $\rho_0 > 0$  tal que  $F(\rho, \theta) = g(\rho)$  para todo  $(\rho, \theta) \in A^*$  con  $\rho < \rho_0$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes (donde  $L \in \mathbb{R}$ ):*

$$(a) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L.$$

$$(b) \quad \lim_{\rho \downarrow 0} g(\rho) = L.$$

**COROLARIO 2** ( $\mathbf{F}(\rho, \theta) = \mathbf{h}(\theta)$ ) *Supongamos que existen  $\rho_0 > 0$  y  $V \subset [0, 2\pi)$  tales que  $A^* \cap \{(0, \rho_0) \times [0, 2\pi)\} = (0, \rho_0) \times V$  y  $F(\rho, \theta) = h(\theta)$  para todo  $(\rho, \theta) \in (0, \rho_0) \times V$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes (donde  $L \in \mathbb{R}$ ):*

$$(a) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L.$$

$$(b) \quad h(\theta) = L \quad \forall \theta \in V.$$

(Nótese que en este caso  $L$  no puede ser  $\pm\infty$ .)

**COROLARIO 3** ( $\mathbf{F}(\rho, \theta) - \mathbf{L} = \mathbf{g}(\rho)\mathbf{h}(\theta)$ ) *Supongamos que  $L \in \mathbb{R}$  y que existen  $\rho_0 > 0$  y  $V \subset [0, 2\pi)$  tales que  $A^* \cap \{(0, \rho_0) \times [0, 2\pi)\} = (0, \rho_0) \times V$  y  $F(\rho, \theta) - L = g(\rho)h(\theta)$  para todo  $(\rho, \theta) \in (0, \rho_0) \times V$ , donde  $h(\theta)$  no es idénticamente nula y  $g(\rho)$  no es idénticamente nula en ningún entorno de 0. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$(a) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L.$$

$$(b) \quad \lim_{\rho \downarrow 0} g(\rho) = 0 \quad \text{y} \\ \text{existe } M \in \mathbb{R} \text{ tal que } |h(\theta)| \leq M \quad \forall \theta \in V.$$

**COROLARIO 4** ( $\mathbf{F}(\rho, \theta) = \mathbf{g}(\rho)\mathbf{h}(\theta)$ ) *Supongamos que existen  $\rho_0 > 0$  y  $V \subset [0, 2\pi)$  tales que  $A^* \cap \{(0, \rho_0) \times [0, 2\pi)\} = (0, \rho_0) \times V$  y  $F(\rho, \theta) = g(\rho)h(\theta)$  para todo  $(\rho, \theta) \in (0, \rho_0) \times V$ , con  $h(\theta)$  positiva. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes (donde  $I \in \{-\infty, +\infty\}$ ):*

$$(a) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = I.$$

$$(b) \quad \lim_{\rho \downarrow 0} g(\rho) = I \quad \text{y} \\ \text{existe } \alpha > 0 \text{ tal que } h(\theta) \geq \alpha \quad \forall \theta \in V.$$

**NOTA 3** *En los Corolarios 2, 3 y 4 nos hemos restringido a formas especiales del dominio de  $f$ ,  $A$ . El lector interesado puede valerse de los Teoremas 2, 3, 4 y 5 para tratar el caso de un dominio  $A$  que no entre en los supuestos de dichos corolarios.*

Llegados a este punto, querríamos relacionar estos resultados con los *límites direccionales*. Dado un ángulo  $\theta$ , no siempre es posible aproximarse al punto  $(a, b)$  a lo largo de la semirrecta determinada por  $\theta$ , ya que pudiera suceder que dicha semirrecta no tenga puntos en común con  $A$ , el dominio de  $f$ , lo bastante próximos a  $(a, b)$ . En general, para  $\theta \in [0, 2\pi)$  dado, las coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  representan un punto de  $A$  solamente para ciertos valores de  $\rho$ . Llamamos  $R^*(\theta)$  al conjunto de estos “valores válidos de  $\rho$ ”.

DEFINICIÓN 3 Para  $\theta \in [0, 2\pi)$ , definimos

$$R^*(\theta) = \{\rho \in (0, +\infty) : (\rho, \theta) \in A^*\}.$$

Con esta notación, el límite direccional sobre la semirrecta determinada por el ángulo  $\theta$  tiene sentido siempre que  $0 \in (R^*(\theta))'$ . Llamamos  $Y$  al conjunto de ángulos para los cuales el límite direccional tiene sentido.

DEFINICIÓN 4  $Y$  es el subconjunto de  $[0, 2\pi)$  definido por

$$Y = \{\theta \in [0, 2\pi) : 0 \in (R^*(\theta))'\}.$$

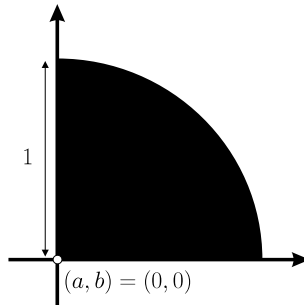


Figura 15:  $R^*(\theta) = (0, 1]$  si  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ;  $R^*(\theta) = \emptyset$  si  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ .  $Y = [0, \frac{\pi}{2}]$ .

En la Figura 15 se muestra el significado geométrico de  $R^*(\theta)$  y de  $Y$  cuando  $(a, b) = (0, 0)$  y  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \|(x, y)\| \leq 1\}$ .

El resultado siguiente, ahora fácil de demostrar, nos dice que si el límite es  $L$ , entonces todos los límites direccionales también deben ser  $L$ .

COROLARIO 5 Supongamos que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$$

(donde  $L \in \bar{\mathbb{R}}$ ). Entonces

$$\lim_{\rho \downarrow 0} F(\rho, \theta) = L \text{ para todo } \theta \in Y.$$

NOTA 4 *En ocasiones se dice que se cumple el recíproco del Corolario 5 cuando  $\lim_{\rho \downarrow 0} F(\rho, \theta) = L$  uniformemente en  $\theta$ , en el sentido de que debe satisfacerse la parte (b) o, equivalentemente, la parte (c) del Teorema 2, 3 o 4. Para invitar a la reflexión sobre la primera frase de esta nota, considérese  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$  (ver Figura 11),  $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 - y}$  si  $(x, y) \in A$  con  $y > 0$ ,  $f(x, y) = 0$  si  $(x, y) \in A$  con  $y \leq 0$ . También puede suceder que  $Y = \emptyset$ , por ejemplo si el dominio de  $f$  es  $A = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ .*

Queda solamente un cosa: la equivalencia entre

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \tag{102}$$

y

$$\lim_{(\rho,\theta) \rightarrow (0,\bar{\theta})} F(\rho,\theta) = L \quad \text{para todos los posibles valores de } \bar{\theta}. \tag{103}$$

Ahora el conjunto de “todos los posibles valores de  $\bar{\theta}$ ” puede ser más grande que  $Y$ . En efecto, para dar sentido al límite en (103) basta que  $(0, \bar{\theta})$  sea un punto de acumulación del dominio de  $F$ ,  $A^*$ . Llamamos  $Z$  al conjunto de “todos los posibles valores de  $\bar{\theta}$ ”.

DEFINICIÓN 5  *$Z$  es el subconjunto de  $[0, 2\pi]$  definido por*

$$Z = \{\theta \in [0, 2\pi] : (0, \theta) \in (A^*)'\}.$$

La prueba de la equivalencia entre (102) y (103) es ligeramente más difícil que las demostraciones anteriores. Esto es así porque necesitamos usar el concepto de *conjunto compacto* en  $\mathbb{R}$ . Un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}$  es *compacto* si es cerrado y acotado. Todo conjunto compacto  $K$  tiene la siguiente propiedad: si

$$K \subset \bigcup_{j \in J} B_j, \tag{104}$$

donde  $B_j$  es abierto para todo  $j \in J$  y  $J$  es posiblemente infinito, entonces existe un número finito de índices en  $J$ , digamos  $j_1, \dots, j_N$ , de tal forma que

$$K \subset B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_N}. \tag{105}$$

LEMA 1 *El conjunto  $Z$  es compacto.*

DEMOSTRACIÓN Puesto que  $Z$  es acotado, es suficiente demostrar que  $Z$  es cerrado en  $\mathbb{R}$ . Si definimos

$$\gamma(\theta) = (0, \theta) \tag{106}$$

para  $\theta \in [0, 2\pi]$ , entonces

$$Z = \gamma^{-1}((A^*)'), \quad (107)$$

y en consecuencia  $Z$  es cerrado (en  $[0, 2\pi]$ , y por lo tanto en  $\mathbb{R}$ ), porque  $(A^*)'$  es cerrado y  $\gamma$  es continua. ■

LEMA 2 *Supongamos que  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}$  tal que  $Z \subset \Omega$ . Entonces existe  $\rho_0 > 0$  tal que*

$$A^* \cap \{(0, \rho_0) \times [0, 2\pi)\} \subset (0, \rho_0) \times \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que el lema es falso. Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $(\rho_n, \theta_n) \in A^*$  con  $\rho_n < \frac{1}{n}$  tal que  $\theta_n \notin \Omega$ . Nótese que la sucesión  $\{(\rho_n, \theta_n)\}$  está acotada, y por lo tanto contiene una subsucesión convergente, que llamamos de nuevo  $\{(\rho_n, \theta_n)\}$ . Sea  $(0, \bar{\theta})$  el punto límite. Claramente  $\bar{\theta} \in Z$ , porque  $\{(\rho_n, \theta_n)\} \subset A^*$ , pero por otra parte esto es imposible, ya que  $\theta_n \notin \Omega$  para todo  $n$ . ■

El resultado siguiente es, en forma de teorema, la equivalencia entre (102) y (103).

TEOREMA 5 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes (donde  $L \in \bar{\mathbb{R}}$ ):*

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L.$$

$$(b) \quad \lim_{(\rho,\theta) \rightarrow (0,\bar{\theta})} F(\rho,\theta) = L \text{ para todo } \bar{\theta} \in Z.$$

DEMOSTRACIÓN La parte (a)  $\Rightarrow$  (b) es una consecuencia inmediata de los Teoremas 2, 3 y 4. Para comprobar que (b)  $\Rightarrow$  (a) supongamos, por motivos de simplicidad, que  $L \in \mathbb{R}$ . (El teorema también es válido si  $L = \pm\infty$ .) Fijemos  $\epsilon > 0$ .

Si se cumple (b), entonces

$$\begin{aligned} &\text{para cada } \bar{\theta} \in Z, \exists \delta(\bar{\theta}) > 0 \text{ tal que} \\ &[\rho < \delta(\bar{\theta}), 0 < |\theta - \bar{\theta}| < \delta(\bar{\theta}), (\rho, \theta) \in A^*] \Rightarrow |F(\rho, \theta) - L| < \epsilon. \end{aligned} \quad (108)$$

Puesto que

$$Z \subset \bigcup_{\bar{\theta} \in Z} (\bar{\theta} - \delta(\bar{\theta}), \bar{\theta} + \delta(\bar{\theta})) \quad (109)$$

y, en virtud del Lema 1,  $Z$  es compacto, existen  $\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_N$  en  $Z$  tales que

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^N (\bar{\theta}_i - \delta_i, \bar{\theta}_i + \delta_i), \tag{110}$$

donde  $\delta_i = \delta(\bar{\theta}_i)$ . Es claro que (108) implica que

$$\begin{aligned} &\exists \delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_N\} > 0 \text{ tal que} \\ &[\rho < \delta, 0 < |\theta - \bar{\theta}_i| < \delta \text{ para algún } i \in \{1, \dots, N\}, (\rho, \theta) \in A^*] \Rightarrow \\ &|F(\rho, \theta) - L| < \epsilon. \end{aligned} \tag{111}$$

Por otra parte, y de acuerdo con (110), el Lema 2 nos asegura la existencia de  $\rho_0 > 0$  cumpliendo

$$A^* \cap \{(0, \rho_0) \times [0, 2\pi)\} \subset (0, \rho_0) \times \bigcup_{i=1}^N (\bar{\theta}_i - \delta_i, \bar{\theta}_i + \delta_i). \tag{112}$$

Por último, (111) y (112) implican

$$\exists \delta_{\min} = \min\{\delta, \rho_0\} > 0 \text{ tal que} \tag{113}$$

$$[\rho < \delta_{\min}, (\rho, \theta) \in A^*] \Rightarrow |F(\rho, \theta) - L| < \epsilon, \tag{114}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} &\exists \delta_{\min} = \min\{\delta, \rho_0\} > 0 \text{ tal que} \\ &[0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta_{\min}, (x, y) \in A] \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon, \end{aligned} \tag{115}$$

esto es, se satisface (a). ■

### AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a un informante anónimo, por haber aconsejado ciertos cambios en una primera versión que han mejorado el artículo. En particular, a él se debe la inclusión de la Proposición 1.

### REFERENCIAS

- [1] M. A. ARMSTRONG, *Topología Básica*, Reverté, Barcelona, 1987. [Edición original: *Basic Topology*, McGraw-Hill, Maidenhead, Berkshire, England, 1979.]
- [2] C. B. BOYER, Newton as the originator of polar coördinates, *Amer. Math. Monthly* **56** (1949) no. 2, 73-78.

- [3] J. B. CONWAY, *Functions of one complex variable I*, Springer, New York, USA, 1978 (segunda edición; primera edición: 1973).
- [4] J. L. COOLIDGE, The origin of polar coordinates, *Amer. Math. Monthly* **59** (1952) no. 2, 78–85.
- [5] J. E. MARSDEN Y A. J. TROMBA, *Vector calculus*, W. H. Freeman, New York, USA, 1996 (cuarta edición; primera edición: 1976).

Juan Bosco Ferreiro Darriba  
Universidade de Santiago de Compostela  
Escola Politécnica Superior  
Departamento de Matemática Aplicada  
Campus Universitario s/n  
27002 Lugo Correo electrónico: [jbosco@lugo.usc.es](mailto:jbosco@lugo.usc.es).  
Óscar López Pouso  
Universidade de Santiago de Compostela  
Facultade de Matemáticas  
Departamento de Matemática Aplicada  
Campus Sur s/n  
15782 Santiago de Compostela (A Coruña)  
Correo-electrónico: [oscarlp@usc.es](mailto:oscarlp@usc.es)