En recuerdo de Giovanni Prodi, un matemático clásico

por

David Arcoya e Ireneo Peral

Esta mañana, la voz apesadumbrada de nuestro amigo Antonio Ambrosetti nos ha hecho llegar la triste noticia. El pasado día 29 de enero Giovanni Prodi ha fallecido en Pisa por un paro cardíaco como consecuencia de la enfermedad de Parkinson que sufría desde hace varios años.

El recuerdo de Giovanni Prodi es el recuerdo de un caballero, un clásico caballero de la ciencia, que la ley de la Naturaleza se lleva. Nuestro conocimiento de la vida y las peripecias humanas de Giovanni Prodi se deben en gran medida a Antonio Ambrosetti, colaborador en un tiempo, y amigo íntimo siempre, de Giovanni Prodi.

Su padre, Mario Prodi, de origen campesino, era ingeniero, y su madre era profesora de instituto. Ambos crearon una familia numerosa de la cual Giovanni Prodi era el primogénito, nacido en Scandiano (Reggio Emilia) en 1925. De entre los ocho hermanos de Giovanni, están Romano, economista y político que llegó a Primer Ministro de la República; Vittorio, físico y miembro del Parlamento Europeo; Giorgio, médico y escritor; Paolo, historiador; y Franco, físico de la atmósfera. Como se ve el ambiente familiar de Giovanni Prodi era el de una familia preocupada por el saber y la cultura. Ese mismo sentimiento hacia la cultura ha sido proyectado por Prodi y su esposa a sus hijos.

El joven Giovanni estudió en el Liceo Ginnasio Ariosto de Reggio Emilia y se licenció en 1943, en plena Segunda Guerra Mundial, en las condiciones extraordinarias que esta circunstancia creaba. A continuación se inscribió en la Universidad de Parma para estudiar matemáticas, pero muy pronto, cuando aún tenía dieciocho años, el ejército italiano le reclama para alistarse. Pasó unos meses en un campo de entrenamiento alemán con otros militares italianos. De sus compañeros de filas conservará recuerdos entrañables, por ejemplo, cómo secretamente colocaban banderas americanas en mapas para marcar el avance de los Aliados.

De regreso a Italia le destinan como telefonista y en la primavera del 1944, como muchos otros compañeros de milicia, abandona las tropas para entregarse posteriormente a la justicia militar en Parma, permaneciendo en prisión durante cinco meses.

Tras su liberación, retorna a sus estudios en la Universidad de Parma, donde finaliza el 24 noviembre de 1948 con una *tesis de licenciatura* sobre la teoría de estabilidad de las ecuaciones diferenciales.

A finales de la primavera de 1949 se celebra un congreso de matemáticas en la propia Universidad de Parma, y con tal ocasión se producen dos hechos importantes para la vida científica de Prodi. Conoce al profesor Giovanni Ricci de la Universidad de Milan, al que califica de «maestro fascinante dotado de un extraordinario gusto matemático». Prodi decidiría marchar a Milán como ayudante del profesor Ricci. El segundo hecho importante es la conferencia que Renato Cacciopoli impartió en el congreso. Las originales ideas de Cacciopoli sobre el Análisis Funcional entusiasmaron a Prodi y le hicieron decidirse a seguir su carrera como matemático. El propio Prodi lo confiesa en un opúsculo dedicado a la conmemoración del cuadragésimo aniversario de la trágica muerte de Caccioppoli, donde dice «las vicisitudes de la guerra han hecho que (la cultura matemática) haya quedado en un nivel muy modesto». Los dos hechos en tales circunstancias fueron decisivos.

En 1956 la Facultad de Ciencias de la Universidad de Trieste lo llama para ocupar una plaza en la Cátedra de Análisis Matemático (en aquel tiempo, el único puesto de matemática pura en dicha facultad).

Permanece en Trieste hasta octubre de 1963, cuando es nombrado profesor en la Universidad de Pisa, donde imparte clases de análisis matemático durante el resto de su vida académica.

Desde principios de la década de los setenta se interesa y trabaja intensamente sobre los problemas de la didáctica de las matemáticas y de la ciencia en general, a la que considera un instrumento para la formación de los jóvenes y el progreso de la Humanidad. Sus obras en este campo demuestran su inteligente percepción de la transmisión del saber matemático. Además, su pasión por la enseñanza lo empujó a generosas colaboraciones internacionales con Somalia y Ecuador.

Desde el punto de vista de la creación matemática hay que destacar su contribución al estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes.

En 1959, en su artículo [1], demuestra la unicidad de solución débil (en el sentido de Leray) de las ecuaciones de Navier-Stokes en la clase $u \in L^2(0,\tau;H^1(\Omega,\mathbb{R}^3))$, $u \in L^4(0,\tau;(L^4(\Omega))^3)$, $u \in L^{2p/(p-3)}(0,\tau;(L^p(\Omega))^3)$, con p en el intervalo $3 < p \leq \infty$. Como apunta el recensor del artículo, nada menos que Jacques Louis Lions, en dicha clase la existencia es desconocida. ¡Todavía hoy es desconocida…!

En el mismo año, en colaboración con Lions [2], los autores prueban la existencia y unicidad de *soluciones turbulentas* en el sentido de Leray para Navier-Stokes en dos dimensiones espaciales en la clase L^4.

Pero el artículo más citado de Prodi es el *Ambrosetti-Prodi* sobre inversión de funciones diferenciables en espacios de Banach, [3].

Supongamos espacios de Banach X e Y y una función

$$F : X \longrightarrow Y.$$

La información sobre la invertibilidad de F cerca de un punto $x \in X$ se obtiene habitualmente de la aproximación lineal de F, la cual viene dada por la derivada $F'(x)$. El resultado abstracto de Ambrosetti-Prodi va más allá y se puede formular como sigue.

Sean como antes espacios de Banach X e Y y una función diferenciable

$$F : X \longrightarrow Y.$$

Consideraremos el conjunto Σ de puntos $x \in X$ en los cuales $F'(x)$ no es invertible. Se supone que Σ es conexo y además que F es regular en el sentido de que F tiene segundas derivadas continuas, que F es propia y que todo punto de Σ es un *punto singular ordinario*, es decir, las soluciones de $F'(x)(z) = 0$ son exactamente los múltiplos de un elemento dado ϕ y, además, para tal ϕ se verifica que $F''(x)(\phi, \phi)$ no está en el rango de $F'(x)$. La última hipótesis que se hace es que para cada $y \in F(\Sigma)$ existe una única solución de $F(x) = y$. Con estas hipótesis Ambrosetti y Prodi probaron que el espacio Y se puede clasificar en tres partes

$$Y = Y_0 \cup F(\Sigma) \cup Y_2$$

de forma que

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} y \in Y_0 \\ y \in F(\Sigma) \\ y \in Y_2 \end{array} \right\} \text{ entonces } F(x) = y \text{ tiene exactamente } \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ soluciones} \\ 1 \text{ solución} \\ 2 \text{ soluciones.} \end{array} \right.$$

Además Y_0 e Y_2 son partes abiertas conexas.

El interés de este resultado abstracto reside en sus aplicaciones a, por ejemplo, ecuaciones elípticas no lineales.

Un ejemplo de experimento previo al resultado de Ambrosetti-Prodi, que puede ayudar a entender su significado, es el siguiente.

Supongamos que plegamos una hoja de papel una vez, es decir, como cuando doblamos el periódico para llevarlo más fácilmente desde el kiosco hasta situarnos cómodamente ante una taza de café. Y supongamos que le damos un tijeretazo de forma transversal. ¿Cuántos cortes hacemos al papel? La respuesta es, como casi siempre, «depende». Puede ser ningún corte si damos el tijeretazo al aire, un corte si acertamos con el vértice del pliegue, o dos cortes si le damos de lleno. Nótese que el experimento anterior lo podemos modelar matemáticamente poniendo un sencilla ecuación: describimos el perfil del pliegue por la función $f(x) = x^2$ cuya gráfica es una parábola. Si el tijeretazo lo damos a una altura $-d^2 < 0$ (resolvemos la ecuación $f(x) = d$) no cortamos la parábola, si lo damos a altura $d = 0$ obtenemos exactamente un punto de corte en $x = 0$, y si lo damos a una altura d^2 obtenemos dos puntos de corte, $x = \pm d$.

El paso a dimensión no finita es el resultado de Ambrosetti-Prodi.

Tal vez, este ejemplo justifique el poder y las consecuencias que la fascinación de la conferencia de Cacciopoli, en el lejano 1949, ejerció sobre el joven Prodi.

La última vez que nos encontramos con Prodi fue en Erice (Sicilia) con ocasión de la celebración del octogésimo cumpleaños suyo y de Louis Nirenberg. Aún allí, a pesar de su avanzada enfermedad, Giovanni Prodi dirigió unas palabras a los presentes. Palabras de aliento y entusiasmo para continuar trabajando en la Matemática.

Éste es un modesto esbozo de una vida rica de un gran hombre esencialmente bueno.

Pisa se ha quedado un poco más sola desde el 29 de enero de 2010.

El río Arno continúa tratando inútilmente de llevar consigo el bello reflejo de Santa María de la Spina y sigue siendo silencioso confidente de la Historia.

Referencias

[1] G. Prodi, Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **48** (1959), 173–182.

[2] J. L. Lions y G. Prodi, Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2, *C. R. Acad. Sci. Paris* **248** (1959), 3519–3521.

[3] A. Ambrosetti y G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **93** (1972), 231–246.

David Arcoya, Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071 Granada

Correo electrónico: darcoya@ugr.es

Ireneo Peral, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid

Correo electrónico: ireneo.peral@uam.es