Las Medallas Fields

Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

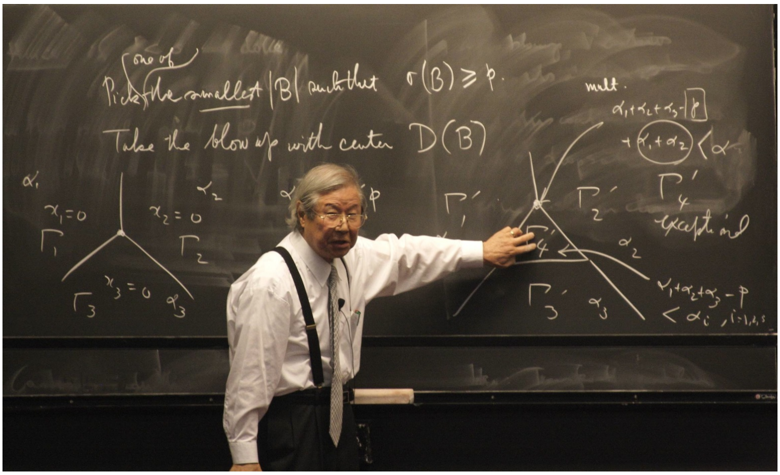
Heisuke Hironaka

por

Antonio Campillo y Santiago Encinas

1. Introducción

Heisuke Hironaka recibió la medalla Fields en 1970 en el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) de Niza. Su contribución más conocida es la demostración de existencia de resolución de singularidades, en el caso de característica cero. Pero Heisuke Hironaka también ha contribuido a otras áreas y sus aportaciones se extienden más allá de su famoso resultado. También ha influido en la creación de escuelas



Heisuke Hironaka en la *Clay Research Conference* celebrada en la Universidad de Harvard en mayo de 2009. Cortesía del *Clay Mathematics Institute.*

científicas y contribuido a la promoción de la ciencia y al porvenir de la investigación en matemáticas.

En lo que sigue intentaremos dar una visión, necesariamente incompleta, de las distintas aportaciones de H. Hironaka a las matemáticas.

2. Familias y equisingularidad

Los primeros trabajos publicados de H. Hironaka surgen a partir de su tesis de maestría y están relacionados con la geometría de las curvas, las familias algebraicas y la equisingularidad en el sentido de Zariski.

En [4] hace una comparación entre el género aritmético y el género efectivo de una curva proyectiva. Aunque esta comparación hoy es bien conocida, en su momento representó una teoría original para el invariante δ de la singularidad, que además era novedosa por ser geométrica. En particular, dicha teoría permite analizar el comportamiento de dicho invariante por deformaciones. La teoría aritmética de Rosenlicht de 1952 basada en las diferenciales era el precedente existente para el tratamiento de δ.

El conocido como «Lema de Hironaka» aparece en [5]. Dada una deformación de una variedad normal, este resultado da un criterio suficiente para concluir que el espacio total de la deformación es también normal. La utilidad de este resultado se aprecia en sus aplicaciones. Dado que existe gran diversidad de singularidades, para comprender una singularidad concreta se consideran sus deformaciones. La mayor simplicidad o complejidad de la singularidad dependerá de su capacidad para ser deformada en otras más sencillas. Ahora bien, las deformaciones se formulan en términos de familias, es decir, morfismos planos suprayectivos del espacio total en el espacio de parámetros, que tienen a la singularidad de partida como una fibra especial. Cuando el espacio total no es normal, su normalización proporciona otra familia con el mismo espacio de parámetros, que es más tratable. Pero la fibra especial de la nueva familia puede tener componentes inmersas adicionales, lo cual dificulta su estudio al tratarse de una deformación de otro objeto. El lema de Hironaka permite evitar esta dificultad, siendo de gran utilidad en la práctica.

La teoría de equisingularidad fue desarrollada por Zariski a finales de los años sesenta y todavía hoy presenta preguntas abiertas, y ha dado lugar a trabajos recientes de J. Lipman y O. Villamayor, entre otros. En los años ochenta, B. Teissier desarrolló la teoría de equisingularidad desde el punto de vista topológico y diferencial, complementario del punto de vista algebraico de Zariski.

Zariski definió de forma inductiva el tipo dimensional de una hipersuperficie V de dimensión d en un punto x, $\mathrm{dt}_Z(V,x)$, como $\mathrm{dt}_Z(V,x) = 1+\mathrm{dt}_Z(\Delta,x)$, donde Δ es el discriminante de una proyección genérica de V en $\mathbb{C}^d$. Si el discriminante Δ es vacío entonces $\mathrm{dt}_Z(\Delta,x) = -1$ y $\mathrm{dt}_Z(V,x) = 0$. Las hipersuperficies de tipo dimensional 1 son aquéllas con lugar singular S liso y de codimensión 1, y las secciones transversales a S equisingulares entre sí como curvas planas. En general, la equisingularidad de Zariski se define como la constancia del tipo dimensional. Dado $Y \subset V$, decimos que V es equisingular a lo largo de Y si $\mathrm{dt}_Z(V,x)$ toma el mismo valor para cualquier punto $x \in Y$.

Una de las aportaciones más importantes de H. Hironaka en este campo aparece en [22], donde prueba que la función $\mathrm{dt}_Z(V,x)$ es semicontinua superiormente. En concreto lo que prueba es que, dada una hipersuperficie $V \subset \mathbb{A}_k^{d+1}$ en el espacio afín sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, y dada una variedad algebraica irreducible $Y \subset V$, existe un abierto denso U en Y en el que la función $\mathrm{dt}_Z(V,x)$ es constante para $x \in U$. Con esta aportación, la noción de equisingularidad de Zariski es geométrica, dando lugar a una estratificación equisingular natural de cualquier espacio singular.

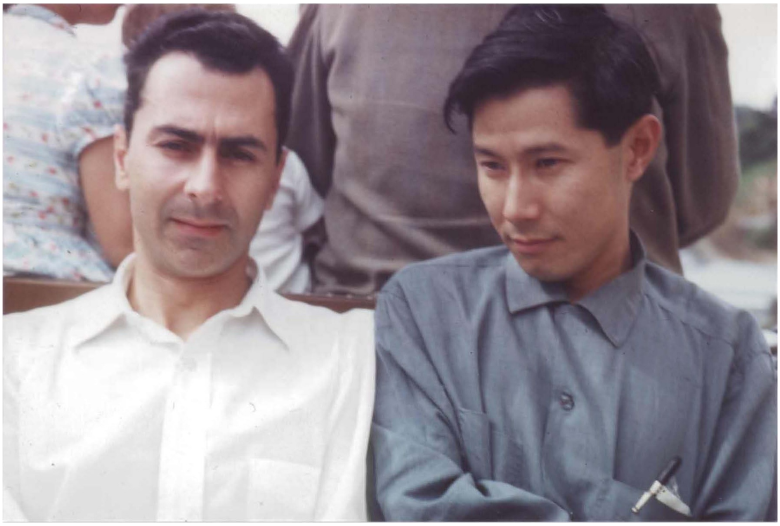
3. Resolución de singularidades

Muchas de las aportaciones de H. Hironaka pertenecen al campo de la geometría birracional, comenzando por su tesis doctoral, donde clasifica los modelos algebraicos de un cuerpo de funciones algebraicas K/k. La tesis de H. Hironaka, presentada en Harvard, no se ha publicado, lo que no evita que sus fotocopias se hayan difundido ampliamente entre los especialistas.

Este trabajo es de un gran interés conceptual, ya que permite comprender las dificultades para trabajar con determinadas singularidades. Si se tiene un morfismo propio y birracional $Z \to X$ entre dos variedades algebraicas (esquemas algebraicos separados e íntegros) normales, una aspiración natural es describir el conjunto ordenado de modelos normales intermedios, es decir, de aquellas variedades algebraicas normales Y tales que se tiene una factorización $Z \to Y \to X$ del morfismo con factores propios y birracionales. Hironaka mostró que existe una correspondencia biunívoca entre este conjunto de modelos y el de las células del llamado cono característico, o cono de Hironaka, de forma que el orden de dominación birracional entre los modelos se corresponde con el de adyacencia entre las células.

El cono característico $C(Z/X)$ es un cono del espacio vectorial real obtenido por extensión a escalares reales del módulo de las clases de equivalencia numérica de divisores relativos para el morfismo. Se trata del cono generado por las clases de los divisores que provienen de haces coherentes de ideales sobre X que en Z se principalizan. El cono de Hironaka $C(Z/X)$ es un objeto que codifica información geométrica relevante sobre el morfismo. Esta información es muy precisa ya que el cono no es ni poliédrico ni cerrado en general. Su clausura es el cono dual del bien conocido cono de curvas, o cono de Kawamata-Mori, que está generado por las clases de equivalencia numérica de las curvas relativas al morfismo y que se utilizó como objeto básico en la teoría de modelos minimales 25 años más tarde. Este resultado sobre la clausura del cono de Hironaka se debe a S. Kleiman, quien fue el último de los alumnos de Zariski. Kleiman muestra cómo el cono característico retiene información adicional a la del cono de curvas. El cono de Hironaka es el apropiado cuando se consideran espacios singulares arbitrarios.

El famoso artículo [6], dividido en dos partes debido a su larga extensión, es donde se prueba, por primera vez, la existencia de resolución de singularidades para variedades algebraicas definidas sobre un cuerpo de característica cero. Dada una variedad algebraica X, una resolución de singularidades es un morfismo propio y



Serge Lang y Heisuke Hironaka en 1962, la época en que el segundo anunció su teorema de resolución de singularidades.

birracional $\varphi : X' \to X$ tal que X' está libre de singularidades, hay un abierto $U \subset X$ sobre el que el morfismo φ es un isomorfismo, y $X' \setminus \varphi^{-1}(U)$ es un divisor con cruzamientos normales, denominado divisor excepcional. También existe la noción inmersa. Dada una variedad $X \subset W$ donde W es un medio ambiente regular, una resolución inmersa de singularidades es un morfismo propio y birracional $\varphi : W' \to W$ con las mismas propiedades del anterior y tal que el transformado estricto $X' \subset W'$ de X mediante φ es regular y tiene cruzamientos normales con el divisor excepcional. Una noción íntimamente ligada a la resolución inmersa es la de principalización de ideales, actualmente llamada resolución logarítmica. Dado un haz de ideales J en una variedad algebraica regular W, una resolución logarítmica de J es un morfismo propio y birracional $\varphi : W' \to W$ tal que W' es regular y el transformado total J^* de J en W' está definido localmente por un cruzamiento normal. En otras palabras el transformado total J^* está generado (localmente) por un monomio.

Hironaka demostró en [6] que, si el cuerpo base es de característica cero, entonces el morfismo φ existe y puede elegirse como una sucesión de explosiones en centros regulares. El teorema de Hironaka es existencial y recientemente ha habido nuevas aportaciones, que dan versiones constructivas del mismo resultado y distintas versiones que satisfacen propiedades funtoriales, simplificaciones, y cálculos explícitos. En todos estos trabajos aparecen las ideas básicas de Hironaka para la resolución de singularidades.

El problema en el caso de característica positiva sigue abierto en general, sólo hay resultados en dimensiones pequeñas. El resultado reciente de O. Piltant y V. Cossart da una respuesta afirmativa si la dimensión de X es tres.

El artículo [21] es una buena exposición de la resolución de singularidades, que es la que vamos a intentar explicar a continuación. La idea clave es medir la singularidad de X mediante la función de Hilbert-Samuel $H_{X,x}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en un punto $x \in X$. En el caso en que X es una hipersuperficie, la función de Hilbert-Samuel equivale a la multiplicidad, pero en general la función de Hilbert-Samuel aporta más información.

La función de Hilbert-Samuel de X es la aplicación $H_X\colon X \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ que asigna a cada $x \in X$ la función $H_{X,x}$. B. Bennet demostró que esta función es semicontinua superiormente, considerando el orden lexicográfico en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. La constancia de la función de Hilbert-Samuel a lo largo de una subvariedad $Y \subset X$ equivale a la platitud normal, que no es otra cosa que la platitud del morfismo del cono normal $C_{X,Y}$ en Y. Mediante una explosión en un centro regular Y y normalmente plano, la función de Hilbert-Samuel no puede aumentar. Estos centros son denominados por Hironaka *centros permitidos*.

Imaginemos una sucesión de transformaciones en centros permitidos. Las funciones de Hilbert-Samuel forman una sucesión decreciente. Otro hecho clave es que en algún momento esta sucesión se estabiliza. El problema de la resolución de singularidades se reduce a: dada X una variedad singular, encontrar una sucesión de transformaciones que hagan bajar estrictamente la función de Hilbert-Samuel. La función de Hilbert-Samuel se estabilizará cuando hayamos logrado una variedad regular.

La reducción que se hace actualmente es la llamada *presentación idealística.* Dada una variedad inmersa $X \subset W$ se considera el máximo valor H de la función de Hilbert-Samuel de X y se le asocia, localmente, un ideal J definido en W, junto con un número $b \in \mathbb{N}$. Los pares (J, b), módulo una relación de equivalencia, se denominan exponentes idealísticos (véase [21]). La presentación idealística consiste en demostrar que el problema de bajar el valor H de la función de Hilbert-Samuel se puede expresar localmente mediante exponentes idealísticos. Cada exponente idealístico (J, b) tiene asociado un conjunto singular $\mathrm{Sing}(J, b)$, que son los puntos donde el orden del ideal es mayor o igual que b. El estrato de Samuel, los puntos $x \in X$ donde $H_{X,x}$ tiene su valor máximo H, se puede expresar localmente como el lugar singular de un cierto exponente idealístico $\mathrm{Sing}(J, b)$. Además esta presentación es estable por transformaciones permitidas. Los centros permitidos de un exponente idealístico (J, b) son las variedades regulares contenidas en $\mathrm{Sing}(J, b)$.

Dado un exponente idealístico, el objetivo ahora es encontrar una sucesión de transformaciones permitidas tales que el lugar singular del exponente idealístico se hace vacío. Lo que equivale en la presentación idealística a que la función de Hilbert-Samuel del transformado de X es menor que el valor inicial H.

La demostración de la existencia de resolución para exponentes idealísticos (J, b) en un medio ambiente W es inductiva en la dimensión de W. El paso inductivo tiene su clave en el concepto de *contacto maximal*, un fenómeno que sólo es válido si el cuerpo base es de característica cero. La idea del contacto maximal se basa en la llamada transformación de Tschirnhausen. Dado un polinomio

$$f = Z^b + a_1(x_1, \dots, x_d)Z^{b-1} + \cdots + a_0(x_1, \dots, x_d),$$

el cambio de variable $Z' = Z + \frac{1}{b}a_1$ hace que el término de grado $b-1$ desaparezca. Si suponemos que $a_1 = 0$, entonces resulta que el exponente idealístico (f, b) es equivalente al que forman los coeficientes $(a_i, b-i)$, $i = 0, \ldots, b-2$. Y este último vive en una dimensión menor. Aquí se puede observar la dificultad que aparece en característica positiva, ya que no siempre es posible dividir por b.

El problema de resolución de singularidades para espacios complejos analíticos [13] presenta nuevas dificultades, que provienen de la naturaleza existencial de los resultados algebraicos. Los centros definidos localmente no necesariamente se globalizan. Para solucionar este problema Hironaka desarrolla el concepto de bosques y jardinería (*gardening of infinitely near singularities*, véase [14] y [17]). El caso analítico está ampliamente desarrollado en los trabajos [17], [1], [2] fruto de su estancia en España, y que podemos considerar el germen de la influencia de Hironaka en los matemáticos españoles.

Como se ha comentado anteriormente, el problema en característica positiva sigue abierto, ha sido y es motivo de trabajo para varios matemáticos. Uno de ellos, el propio H. Hironaka, que en el pasado ha intentado aproximarse al problema [8], [9], [10], [3]. Más recientemente han aparecido dos trabajos [23] y [24] donde Hironaka introduce un álgebra graduada que, según demuestra, es (localmente) finitamente generada y además estable por la acción de los operadores diferenciales.

La utilización de explosiones en centros lisos y permitidos como estrategia para probar la resolución de singularidades es, en sí misma, una aportación de Hironaka de extrema originalidad. Dichas explosiones tienen siempre un divisor como variedad excepcional, lo cual no sucede con la generalidad de las resoluciones. Por ejemplo, existen contracciones de subvariedades de codimensión mayor que uno en ambientes lisos que tautológicamente son una resolución del espacio con singularidad aislada que la contracción del ambiente crea. Otro ejemplo es el de la geometría tórica, en el que las resoluciones de interés se obtienen como refinamientos regulares del abanico de definición, que, típicamente, no son explosiones en centros lisos.

Hay una aportación importante de Hironaka a la resolución que no usa explosiones en centros lisos. Según ha conjeturado Nash, las variedades algebraicas pueden resolverse aplicando reiteradamente la explosión en el ideal jacobiano, conocida como explosión de Nash. Esta conjetura sólo ha sido probada para curvas y, si se confirma, para variedades tóricas. Existe una versión débil de la conjetura en la que la explosión que se itera es la de Nash normalizada.

Hironaka demostró que la versión débil de la conjetura de Nash para singularidades de superficies se reduce al caso de un tipo especial de singularidades racionales, para las que más tarde sería probada. Para este resultado ha utilizado la teoría de valoraciones, precisamente la técnica con la que Zariski había intentado probar la resolución y que Hironaka evitó en su demostración.

4. Platitud

El teorema de resolución de singularidades de Hironaka es un resultado que quizás tenga todas las buenas propiedades de un resultado matemático. Por una parte resuelve uno de los problemas principales de las matemáticas. Por otro lado, la prueba es no constructiva y, objetivamente, una de las más difíciles de las matemáticas. También ha dado lugar a versiones constructivas, algorítmicas y computacionales, lo que se debe al hecho de que los morfismos que utiliza son composiciones de explosiones en centros lisos, y por tanto muy especiales. Estos morfismos son fáciles de visualizar, de utilizar en la práctica, y sus conos característicos más descriptibles explícitamente. Finalmente, que los centros de explosión sean permitidos y no arbitrarios, requiere que la complicidad a nivel de ecuaciones, exigida por la platitud, tenga lugar a lo largo de todo proceso.

En resumen, se trata de una prueba muy conceptual y no constructiva pero dependiente del comportamiento de las ecuaciones. Esta dependencia también puede explicar por qué la resolución en característica positiva precisa una dosis de creatividad matemática, aún por venir. En las exposiciones y conferencias que Hironaka imparte en la actualidad, no cesa de mostrar esta realidad, ni de explicar cómo aplica sus conocimientos para investigar el comportamiento de las ecuaciones, ni por qué aporta constantemente nuevas ideas para la resolución en característica p. Transmite así, con nitidez, todos los valores del método científico en sus intervenciones.

La localización de centros de explosión no sólo permitidos, sino útiles para la resolución, requiere buscarlos dentro del estrato de Samuel dado por el valor máximo de la función de Hilbert-Samuel. Este requisito llevó a Hironaka a crear la noción de base estándar, similar a la de base de Gröbner. Ambos tipos de bases fueron popularizadas a partir de 1964 en ámbitos diferentes. La viabilidad del cálculo de conos tangentes permitió, en lo esencial, explicar su similitud con claridad en los ochenta, al distinguir entre órdenes monomiales locales o globales para tratar respectivamente unas u otras.

El teorema de división de Hironaka fue una novedosa técnica durante mucho tiempo, cuya versión global no se consideró hasta finales de los setenta. Es un resultado profundo de análisis complejo cuando se aplica a funciones holomorfas. Esta técnica permite probar la existencia de centros permitidos locales apropiados, cuya compatibilidad global es una dificultad añadida. Este tipo de dificultades son las que hacen necesario un formalismo adecuado y justifican las pruebas no constructivas. En el caso analítico, las dificultades y la dosis proporcional de formalismo son considerablemente mayores.

En igual medida, el tratamiento geométrico de la platitud se apoya en un formalismo no constructivo. Un ejemplo son los teoremas de aplanamiento de Hironaka [7], [11], [26], [12]. En geometría algebraica, la principalización de un haz coherente de ideales sobre una variedad lisa puede verse como un resultado de aplanamiento. En el marco general de geometría analítica se tienen varias versiones de aplanamiento en función de las hipótesis. La más simple de describir afirma que si $X \to S$ es una aplicación holomorfa propia de espacios analíticos y S es un espacio analítico reducido y numerable en el infinito, entonces existe un cambio de base bimeromorfo $S' \to S$ tal que la aplicación holomorfa obtenida por cambio de base es plana.

Las consecuencias del aplanamiento son múltiples, de hecho su objetivo es convertir aplicaciones propias en familias geométricas. La dificultad técnica consiste en definir el cambio de base más apropiado $S' \to S$ que garantice la platitud. Para ello

Hironaka utiliza de nuevo sus ingredientes habituales, las explosiones en centros lisos y el teorema de división [25], [19], [20].

5. Conjuntos sub-analíticos y semi-analíticos

En [15] y [16] se puede encontrar desarrollada la teoría de conjuntos semi-analíticos y sub-analíticos, así como el teorema de rectilinealización.

Un conjunto $A \subset X$, en una variedad real analítica X, es semi-analítico si, localmente, está en la clase cerrada por intersecciones finitas, uniones finitas y complementarios de los conjuntos de la forma $\{x \mid f(x) > 0\}$ donde f es una función real analítica.

Un conjunto $B \subset X$ es sub-analítico si, localmente, está en la clase cerrada por las mismas operaciones anteriores de los conjuntos que son imagen de una función analítica $g : Y \to X$.

Es fácil probar que si un conjunto es semi-analítico entonces es sub-analítico.

Hironaka demostró el teorema de rectilinealización para conjuntos sub-analíticos, que podemos entender como una resolución de singularidades en la clase de conjuntos subanalíticos. Dado un conjunto subanalítico $B \subset X$, existen un número finito de aplicaciones analíticas $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^{n_\alpha} \to X$ tales que las imágenes de φ_α recubren un compacto de X fijado previamente y cada $\varphi_\alpha^{-1}(B)$ es un cuadrante de $\mathbb{R}^{n_\alpha}$. Cada una de las aplicaciones analíticas φ_α es una sucesión de explosiones locales.

Como consecuencia, Hironaka obtiene las desigualdades de Łojasiewicz para funciones analíticas y conjuntos semi-analíticos, de hecho generalizando los resultados para conjuntos sub-analíticos.

Otro resultado destacable es la demostración de la triangularización de conjuntos sub-analíticos [18]. También es necesario mencionar los resultados sobre estratificaciones de Whitney.

6. El legado de Heisuke Hironaka

Por haber resuelto uno de los problemas más importantes de las matemáticas, Heisuke Hironaka es conocido por toda la comunidad matemática. Además de la medalla Fields del ICM1970 de Niza, ha recibido otros honores y distinciones. Destaca la Orden de la Cultura de Japón en 1975, que se concede por las contribuciones significativas al avance o mejora de la ciencia, la tecnología, las artes o la cultura. Lo confiere el Emperador de Japón y se entrega en el Palacio Imperial en una ceremonia singular con motivo del día de la cultura. Desde los años setenta, Hironaka es una persona altamente notoria y respetada por la población japonesa.

Nació en 1931 en el seno de una numerosa familia en la provincia de Yamaguchi, próxima a Hiroshima, donde vivió hasta poco después de los 20 años, cuando se unió en la Universidad de Harvard a un grupo selecto de estudiantes. Ello fue consecuencia de una visita a Japón de Zariski, quien le dirigió la tesis que presentó en 1960 con el título «On the Theory of Birational Blowing up». Se trata de un trabajo precursor, entre otros, de los de S. Mori sobre los modelos minimales de la geometría birracional por los que recibió la medalla Fields en 1990. Fue Hironaka quien presentó los trabajos de S. Mori en el ICM1990 de Kyoto.

Tras unos años en las universidades de Brandeis y Columbia, pronto llegó a ser profesor de la de Harvard. Como emérito regresó a Japón a principios de los ochenta con objeto de dedicarse a la promoción de las matemáticas en su país. Para ello creó una fundación con un doble objetivo; por una parte ayudar a los jóvenes matemáticos japoneses para que dispongan de las mejores condiciones en el país en el que trabajen, y, por otra, despertar el interés por la ciencia de estudiantes no universitarios para los que organiza seminarios informales en los que se reúnen con científicos relevantes (japoneses o no). Su constancia y su eficacia para recaudar y distribuir los fondos hacen que muchos de los principales centros de investigación internacionales registren entre sus aportaciones las de su fundación.

Heisuke Hironaka en 2002. Cortesía de Eriko Hironaka.

La repercusión de los estudios de Hironaka es universal. Sus trabajos tienen aplicación en dominios científicos muy diversos, además de la propia geometría. Con frecuencia, algunos conceptos sólo se pueden definir y manejar gracias a uno de sus teoremas. En muchos países existe huella de su actividad científica y se encuentran discípulos suyos. En Europa, ello ocurre principalmente en Italia, Francia y España.

Su relación con Italia, que viene de los años sesenta, se activó en 1974 con motivo de un encuentro en Pisa. Se ha centrado en la geometría algebraica y analítica real, con frecuentes visitas a Pisa y a Trento. En Francia la relación es intensa y extensa. Comenzó a principios del tan significativo año 1968, cuando, durante una de sus visitas al Instituto de Altos Estudios Científicos (IHES), un grupo de jóvenes matemáticos franceses decidió acudir a un prolongado curso que impartió en Finlandia en el verano de ese mismo año. Las estancias de Hironaka en Francia han sido frecuentes en Niza y París desde entonces, ya que eran los lugares de procedencia de los más significados de aquellos jóvenes. El día 2 de julio de 2003, el profesor Heisuke Hironaka recibió el grado de Doctor Honoris Causa por la Universidad de Niza.

Desde el propio ICM1970 de Niza, la relación con jóvenes investigadores españoles también fue intensa, habiendo realizado en la década de los setenta estancias frecuentes en la Universidad Complutense. Durante ellas impartió cursos, como los realizados en el Instituto Jorge Juan del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) pocos años antes de su desactivación, que dieron lugar a las publicaciones [17], [1] y [2]. También fue receptor de investigadores postdoctorales españoles, y la mayoría de sus principales discípulos, colaboradores, o expertos en resolución, también visitaron con mucha frecuencia España desde el comienzo de los ochenta. Si se nos permite la expresión, fue toda una circunstancia afortunada para el desarrollo en aquella época de las matemáticas en nuestro país.

El profesor Hironaka recibió el día 28 de enero de 1982 el grado de Doctor Honoris Causa por la Universidad Complutense. La ceremonia fue presidida por el entonces ministro de Educación Federico Mayor Zaragoza, y académicamente por el rector Francisco Bustelo. Tal vez merezca la pena destacar que este ministro, quien más tarde sería director general de la UNESCO, presidente del grupo de expertos que recomendó la creación del European Research Council (ERC), e impulsor infatigable de la ciencia en España, había sido rector de la Universidad de Granada a la edad típica a la que es posible para los matemáticos obtener una medalla Fields.

Hironaka en su investidura como Doctor Honoris Causa por la Universidad Complutense de Madrid en enero de 1982.

Los ecos políticos de esta ceremonia, con meditada amplificación ministerial al tratarse del día de Santo Tomás de Aquino, se centraban en la necesidad de una ley de autonomía universitaria, que resultó ser la antesala de la transformadora Ley de Reforma Universitaria (LRU) de 1983 y consecuente Ley de la Ciencia de 1985. Los ecos académicos señalaban la oportunidad de aprovechar el marco deducible de dicha autonomía para redactar unos estatutos universitarios eficaces y progresistas, un sueño que, al hacerse realidad en la universidad española poco más tarde, evitó que la transformación se frenase.

Los ecos científicos fueron tan precursores y brillantes como los anteriores. La prensa recogió que la influencia de los estudios del profesor Heisuke Hironaka había propiciado la creación en España de una escuela para el estudio de las singularidades de variedades algebraicas y espacios analíticos complejos. Esta escuela tenía especial implantación en el Departamento de Álgebra de la Universidad Complutense. Hemos de añadir que, en esa fecha, la escuela se había derivado también, y con la misma intensidad, a las universidades de Sevilla y de Valladolid, y se había instalado en la de Barcelona. Posteriormente, el natural flujo de investigadores ha permitido el desarrollo del estudio de las singularidades en otras muchas universidades como son la Autónoma de Madrid, Santiago de Compostela, La Laguna, Zaragoza, Valencia, Castellón, Politécnica de Cataluña o Autónoma de Barcelona. Recientemente ha llegado también al CSIC gracias a un *starting grant* del ERC obtenido por un joven investigador de la escuela. En particular, se puede decir que una amplia parte de la investigación de vanguardia sobre resolución de singularidades se realiza en el marco de nuestro sistema de investigación, y está liderada por colegas españoles.

Hoy día, la influencia de los estudios del profesor Heisuke Hironaka en España sigue siendo la misma. Además es doblemente visible, ya que prosigue sus estudios y visita frecuentemente España, transmitiendo sus ideas y conocimientos.

Referencias

[1] José M. Aroca, Heisuke Hironaka y José L. Vicente. *The theory of the maximal contact.* Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1975. Memorias de Matemática del Instituto «Jorge Juan», No. 29.

[2] José M. Aroca, Heisuke Hironaka y José L. Vicente. *Desingularization theorems.* Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1977. Memorias de Matemática del Instituto «Jorge Juan», No. 30.

[3] Vincent Cossart, Jean Giraud y Ulrich Orbanz. *Resolution of surface singularities*, volume 1101 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1984. With an appendix by H. Hironaka.

[4] Heisuke Hironaka. On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.*, 30:177–195, 1957.

[5] Heisuke Hironaka. A note on algebraic geometry over ground rings. The invariance of Hilbert characteristic functions under the specialization process. *Illinois J. Math.*, 2:355–366, 1958.

[6] Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2)*, 79:109–203, 1964; *Ibid.*, 79:205–326, 1964.

[7] Heisuke Hironaka. On the equivalence of singularities. I. In *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, pág. 153–200. Harper & Row, New York, 1965.

[8] Heisuke Hironaka. On the characters ν^* and τ^* of singularities. *J. Math. Kyoto Univ.*, 7:19–43, 1967.

[9] Heisuke Hironaka. Corrections to: «On the characters ν^* and τ^* of singularities». *J. Math. Kyoto Univ.*, 7:325–327, 1967.

[10] Heisuke Hironaka. Characteristic polyhedra of singularities. *J. Math. Kyoto Univ.*, 7:251–293, 1967.

[11] Heisuke Hironaka. On some formal imbeddings. *Illinois J. Math.*, 12:587–602, 1968.

[12] Heisuke Hironaka. Formal line bundles along exceptional loci. In *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, pág. 201–218. Oxford Univ. Press, London, 1969.

[13] Heisuke Hironaka. Desingularization of complex-analytic varieties. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2*, pág. 627–631. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[14] HEISUKE HIRONAKA. Gardening of infinitely near singularities. In *Algebraic geometry, Oslo 1970 (Proc. Fifth Nordic Summer School in Math.)*, pág. 315–332. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.

[15] HEISUKE HIRONAKA. Introduction aux ensembles sous-analytiques. In *Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités en Géom. Anal., Inst. Études Sci., Cargèse, 1972)*, pág. 13–20. Astérisque, Nos. 7 et 8. Soc. Math. France, Paris, 1973. Rédigé par André Hirschowitz et Patrick Le Barz.

[16] HEISUKE HIRONAKA. *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps.* Istituto Matematico «L. Tonelli» dell'Università Di Pisa, Pisa, 1973. Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

[17] HEISUKE HIRONAKA. *Introduction to the theory of infinitely near singular points.* Consejo Superior De Investigaciones Científicas, Madrid, 1974. Memorias de Matematica del Instituto «Jorge Juan», No. 28.

[18] HEISUKE HIRONAKA. Triangulations of algebraic sets. In *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, pág. 165–185. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.

[19] HEISUKE HIRONAKA. Flattening of analytic maps. In *Manifolds—Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973)*, pág. 313–321. Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1975.

[20] HEISUKE HIRONAKA. Flattening theorem in complex-analytic geometry. *Amer. J. Math.*, 97:503–547, 1975.

[21] HEISUKE HIRONAKA. Idealistic exponents of singularity. In *Algebraic geometry (J. J. Sylvester Sympos., Johns Hopkins Univ., Baltimore, Md., 1976)*, pág. 52–125. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md., 1977.

[22] HEISUKE HIRONAKA. On Zariski dimensionality type. *Amer. J. Math.*, 101(2):384–419, 1979.

[23] HEISUKE HIRONAKA. Theory of infinitely near singular points. *J. Korean Math. Soc.*, 40(5):901–920, 2003.

[24] HEISUKE HIRONAKA. Three key theorems on infinitely near singularities. In *Singularités Franco-Japonaises*, volume 10 of *Sémin. Congr.*, pág. 87–126. Soc. Math. France, Paris, 2005.

[25] HEISUKE HIRONAKA, MONIQUE LEJEUNE-JALABERT Y BERNARD TEISSIER. Platificateur local en géométrie analytique et aplatissement local. In *Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci. de Cargèse, 1972)*, pág. 441–463. Astérisque, Nos. 7 et 8, 1973.

[26] HEISUKE HIRONAKA Y HIDEYUKI MATSUMURA. Formal functions and formal embeddings. *J. Math. Soc. Japan*, 20:52–82, 1968.

ANTONIO CAMPILLO, DPTO. DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
Correo electrónico: `campillo@agt.uva.es`

SANTIAGO ENCINAS, DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA, UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
Correo electrónico: `sencinas@maf.uva.es`