Alvin E. Roth y Lloyd Shapley, Premios Nobel de Economía 2012

por

Carmen Herrero

Resumen. Presentamos una introducción a los modelos de emparejamiento, base de la concesión del Nobel de Economía 2012 a A.E. Roth y L. Shapley. La construcción de estos modelos constituye un ejercicio de análisis, experimentación y diseño, camino por el que la Economía está transitando en las últimas décadas, cada vez con más precisión. Tienen además una virtud importante: posibilitan la resolución de un gran número de problemas de la vida real y visualizan de modo muy claro la capacidad del razonamiento matemático para dar soluciones sencillas y específicas a problemas en los que las respuestas no se obtienen en un mercado monetario.

Introducción

La Academia Sueca ha otorgado el último premio Nobel de Economía a Alvin E. Roth y Lloyd Shapley «por sus contribuciones en la teoría de las asignaciones estables y el diseño de mercados». Una vez más encontramos a dos matemáticos, especialistas en Teoría de Juegos, galardonados con el Premio Nobel de Economía, indicando la importancia de las aportaciones de la Matemática al desarrollo de las Ciencias Sociales, en general, y de la Economía, en particular.

El trabajo por el que Roth y Shapley han sido premiados se entronca, fundamentalmente, en el análisis de ciertos mercados, los llamados «mercados de emparejamiento», en los que no hay, en general, intercambios monetarios, o en los que no hay un precio de equilibrio que sirva para igualar oferta y demanda. Hay muchos tipos de problemas de emparejamiento: entre trabajadores y empresas, en el mercado laboral; entre estudiantes y colegios o universidades, en el problema de asignación de estudiantes; entre diferentes estudiantes o colegas, cuando se decide con quién compartir habitación o despachos; entre donantes y receptores de órganos para trasplantes, etc.

Una característica de estos problemas es que se trata de asignar elementos indivisibles (una plaza en una universidad, un puesto de trabajo, un órgano) a cada uno de los demandantes. Además, estos elementos indivisibles son distintos entre sí y, por tanto, no se perciben como indiferentes por los agentes a los que se les van a asignar (por ejemplo, los estudiantes prefieren una universidad determinada antes que otra; los puestos de trabajo tienen características diferenciadas, en cuanto a salario, obligaciones, el tipo de empresa, etc.; los riñones disponibles no son adecuados para todos los potenciales receptores). En muchos casos, además, hay preferencias en los dos lados del mercado (las universidades prefieren determinados perfiles de estudiantes sobre otros, las empresas tienen también preferencias sobre las características de los trabajadores, etc.).

Retratos oficiales de Alvin E. Roth y Lloyd S. Shapley como ganadores del Premio Nobel. (Fotos: Ulla Montan, © Nobel Foundation 2012.)

La modelización de este tipo de problemas de asignación es, en definitiva, el planteamiento de un problema de matemática discreta, cuya solución no es inmediata, pero que está íntimamente ligada con las ideas vinculadas a la Teoría de Juegos. Como en la teoría de juegos cooperativos, se trata de analizar la existencia de soluciones eficientes y estables (el Núcleo) y, en su caso, de encontrar un procedimiento para hallarlas. La inteligencia de Shapley y Roth ha permitido, por una parte, modelizar adecuadamente este tipo de problemas, por otra, construir algoritmos para encontrar las soluciones en el Núcleo, y, finalmente, extendiendo y acomodando adecuadamente los modelos, encontrar procedimientos suficientemente sencillos como para aplicar estas soluciones a multitud de problemas de la vida real.

Este es un ejemplo del nuevo papel que los economistas deben jugar en el proceso del avance del conocimiento. Los economistas (y los matemáticos) cada vez entran más en los procesos de *diseño de soluciones.* La diferencia fundamental entre las pruebas de existencia de solución y la construcción de procedimientos para hallar la solución de un problema es la forma de acercarse a la puesta en práctica del conocimiento obtenido, a que la sociedad se pueda beneficiar directamente de este conocimiento.

Lloyd S. Shapley tras recibir su Premio Nobel. (Foto: Alexander Mahmoud, © Nobel Media AB 2012.)

Distintos Modelos de Emparejamiento

La mejor forma de entender los modelos de emparejamiento es revisando los modelos más comunes en este tipo de «mercados». Vamos a distinguir tres tipos de modelos, que, a su vez, van a estar ejemplificados por tres casos específicos:

1. El mercado de los matrimonios.
2. La asignación de órganos.
3. La asignación de plazas en universidades.

Cada uno de estos ejemplos servirá para familiarizarnos con el tipo de preguntas y dificultades que se presentan al analizarlos.

El mercado de los matrimonios

Consideremos una situación en la que tenemos dos conjuntos de agentes: hombres, $H = \{h_1, \dots, h_n, 0\}$, y mujeres, $M = \{m_1, \dots, m_n, 0\}$. Cada uno de los hombres tiene una relación de preferencia sobre las mujeres, y, simétricamente, cada una de las mujeres tiene una relación de preferencia sobre los hombres, es decir, son capaces de ordenar linealmente los elementos del otro conjunto. Introducimos el elemento 0 en cada uno de los dos conjuntos para dar la opción (tanto a hombres como a

Avin E. Roth durante una entrevista para Nobelprize.org. (Foto: Niklas Elmehed, © Nobel Media AB 2012.)

mujeres) de permanecer solteros (sin emparejar), en el caso de que no les satisfaga el emparejamiento propuesto.

Consideremos, por ejemplo, el caso de tres hombres y tres mujeres, con las siguientes preferencias, donde solo se ordenan las posibles parejas preferidas a permanecer soltero/a:

h_1	h_2	h_3
m_1	m_2	m_1
m_2	m_3	m_3
m_3	m_1	

m_1	m_2	m_3
h_2	h_1	h_1
h_3		h_3
		h_2

En este caso, la segunda mujer solo acepta ser emparejada con el primer hombre. Ante cualquier otro emparejamiento, prefiere permanecer soltera.

Un problema de emparejamiento está dado, entonces, por los conjuntos H y M y por las preferencias de cada uno de los hombres y cada una de las mujeres, esto es, la terna (H, M, P), donde P es el perfil de preferencias de los hombres sobre las mujeres y de las mujeres sobre los hombres.

Una **asignación** es una aplicación $\mu : H \cup M \longrightarrow H \cup M$ tal que

(1) $\mu(h) \in M$ para todo $h \in H$;

(2) $\mu(m) \in H$ para todo $m \in M$;

(3) dado un par $(h, m) \in H \times M$, $\mu(h) = m$ si y solo si $\mu(m) = h$.

Cuando los conjuntos H y M son fijos, las propiedades de una asignación dependen de los perfiles de preferencias de los agentes.

Consideremos una asignación, y supongamos que hay un hombre y una mujer que no están emparejados entre sí, pero que ambos se prefieren mutuamente a las parejas que les han sido asignadas. Si este es el caso, decimos que la asignación se puede **bloquear** por dicha pareja.

En el ejemplo anterior, consideremos la asignación $\{(h_1, m_3), (h_2, m_2), (h_3, m_1)\}$. Esta asignación se puede bloquear por la pareja (h_1, m_2), ya que, al emparejarse entre sí, ambos mejoran respecto de sus emparejamientos anteriores.

Una asignación es **estable** cuando no hay ninguna pareja que pueda bloquear dicha asignación.

El **Núcleo** de un problema de asignación es el conjunto de las asignaciones estables. Y parece natural pensar que las posibles soluciones razonables a nuestro problema deberían ser asignaciones estables. Evidentemente, surgen las siguientes preguntas:

1. ¿Podemos garantizar la existencia de asignaciones estables para cualquier problema?
2. Si la respuesta a la primera pregunta es sí, ¿cómo es el conjunto de asignaciones estables?
3. ¿Es posible calcular fácilmente las asignaciones estables (o al menos algunas de ellas)?
4. Los mecanismos que sirven para calcular estas asignaciones, ¿son compatibles con los incentivos? O, dicho de otro modo, ¿tienen los agentes motivos para mentir al revelar sus preferencias?

Las respuestas a estas preguntas fueron proporcionadas por nuestros Nobel, en distintos trabajos y con distintos colaboradores. Shapley y Scarf [17] probaron en 1974 que el conjunto de asignaciones estables es siempre no vacío; en 1982, Roth [8] demostró que el conjunto de asignaciones estables tiene estructura de retículo; y, en 1990, Roth y Oliveira Sotomayor [12] presentaron una modificación del algoritmo de Gale y Shapley [4] para obtener los extremos de dicho retículo, que están compuestos por las asignaciones más preferidas por cada uno de los dos grupos. Por su parte, el propio Roth en 1982 [8], y posteriormente Alcalde y Barberà en 1994 [3] y Alcalde en 1996 [2], analizaron la compatibilidad con los incentivos en este problema.

El algoritmo, que proporciona además una prueba constructiva de la existencia de asignaciones estables, es el siguiente:

Paso 1: Cada uno de los hombres propone emparejarse con él a su mujer preferida.

Paso 2: Si una mujer tiene varias propuestas, acepta la que más le agrada (siempre que sea preferida a quedarse soltera, en cuyo caso, la rechaza). Se realizan ciertos emparejamientos y quedan sin emparejar un cierto número de hombres y mujeres.

Paso 3: Los hombres no emparejados proponen a su mejor opción entre las restantes.

Paso 4: Las mujeres aceptan o rechazan las ofertas...

Eventualmente, en un número finito de pasos, todos los hombres y mujeres quedan emparejados o solteros, sin opciones a cambiar su situación. **FIN**

El resultado del algoritmo anterior proporciona el emparejamiento estable más preferido por los hombres. De manera simétrica, si empiezan proponiendo las mujeres se obtiene otro emparejamiento estable: el preferido por ellas.

En nuestro ejemplo, el algoritmo funciona de la siguiente manera:

Paso 1: h_1 propone a m_1; h_2 propone a m_2; h_3 propone a m_1.

Paso 2: m_1 acepta a h_3; m_2 rechaza a h_2.

Paso 3: h_1 propone a m_2; h_2 propone a m_3.

Paso 4: m_2 acepta a h_1; m_3 acepta a h_2. **FIN**

Así, el emparejamiento obtenido es $\{(h_1, m_2), (h_2, m_3), (h_3, m_1)\}$.

Si, por el contrario, empiezan proponiendo las mujeres, el emparejamiento alcanzado sería $\{(h_1, m_2), (h_2, m_1), (h_3, m_3)\}$.

A la pregunta de si este mecanismo es *manipulable,* es decir, si de manera unilateral los agentes pueden conseguir resultados más favorables fingiendo que sus preferencias son diferentes de las reales, la respuesta es que sí. Consideremos el resultado del mecanismo cuando empiezan proponiendo los hombres. Como hemos visto, el resultado es el emparejamiento $\{(h_1, m_2), (h_2, m_3), (h_3, m_1)\}$. Supongamos que m_1 finge que sus preferencias son tales que, si no se empareja con h_2, prefiere permanecer soltera. Entonces el mecanismo funciona del siguiente modo:

Paso 1: h_1 propone a m_1; h_2 propone a m_2; h_3 propone a m_1.

Paso 2: m_1 rechaza a h_1 y a h_3; m_2 rechaza a h_2.

Paso 3: h_1 propone a m_2; h_2 propone a m_3; h_3 propone a m_3.

Paso 4: m_2 acepta a h_1; m_3 acepta a h_3.

Paso 5: h_2 propone a m_1.

Paso 6: m_1 acepta a h_2. **FIN**

Ahora el emparejamiento obtenido es $\{(h_1, m_2), (h_2, m_1), (h_3, m_3)\}$, emparejamiento en que m_1 obtiene un resultado más favorable a lo que conseguía declarando sus verdaderas preferencias.

El problema de emparejamiento de matrimonios tiene muchas aplicaciones. En particular, es de gran utilidad en el mercado laboral, cuando los puestos de trabajo ofrecidos por las empresas son evaluados por los candidatos y, viceversa, las empresas tienen preferencias sobre el perfil de los trabajadores que desean contratar. Cuando, en un procedimiento de asignación centralizado, las preferencias de unos y otras son conocidas, es sencillo obtener asignaciones empresa-trabajador que cumplan los requisitos de eficiencia y estabilidad.

El problema de intercambio de órganos

Uno de los problemas que más impacto mediático ha tenido entre los relacionados con el tema de emparejamiento es el que se refiere a la posibilidad de realización de trasplantes cruzados de órganos (en especial de riñones) entre vivos.

El trasplante de riñón es la mejor opción para pacientes con insuficiencia renal terminal. Los trasplantes de riñón se pueden realizar de un donante con muerte encefálica, o también de un donante vivo, siendo este tipo menos frecuente pero mucho más efectivo. Un problema adicional que aparece en las donaciones entre vivos es que, en muchos casos, el potencial donante y el receptor son incompatibles, o su compatibilidad (relacionada con el grupo sanguíneo y las características de los tejidos) es baja, impidiendo la realización del trasplante. En el caso en que donante y receptor sean incompatibles, la posibilidad de trasplante se pierde. Para resolver este problema se plantea la idea de los trasplantes cruzados: si tenemos dos donantes que son incompatibles con sus receptores, pero son compatibles con el receptor del otro donante, una solución sería *cruzar* los donantes y los receptores y, en lugar de no hacer ningún trasplante, tendríamos dos riñones aprovechados para dos personas que los necesitan. Desde 2003 se están realizando en el mundo trasplantes cruzados con relativa asiduidad.

¿Cómo resolver el problema de los trasplantes cruzados de riñones? En realidad, este es un ejemplo de un problema de intercambio de objetos indivisibles, un problema sencillo de emparejamiento (en este caso, de riñones con receptores).

Consideremos una situación en la que hay n objetos indivisibles que son propiedad, cada uno de ellos, de una persona (en el caso de los riñones, cada paciente tiene un donante propio). Cada una de las personas tiene una preferencia estricta sobre los objetos, no siendo su propio objeto el más preferido (las preferencias sobre los riñones se determinan aquí médicamente, analizando el grado de compatibilidad). Tenemos entonces un problema definido por el conjunto de objetos, O (*los riñones*), el conjunto de agentes, A (*los pacientes*), las preferencias de los agentes sobre los objetos, P (*el grado de compatibilidad*), y la distribución inicial de objetos, ω (*donde cada paciente está emparejado con el riñón de su donante*). Así, (O, A, P, ω) describe un problema genérico.

Este es un mundo en el que no hay mercado (precios). Se trata de encontrar una asignación en la que cada agente reciba un objeto, y que cumpla buenas propiedades.

Una **asignación** es una aplicación $\mu : A \longrightarrow O$ biyectiva, esto es, que cada objeto se asigna a un único agente y cada agente recibe un único objeto.

Una asignación es **individualmente racional** si, para cada $a \in A$, $\mu(a) \succeq_a \omega(a)$, es decir, si el objeto asignado a cada agente es para este mejor que su objeto inicial. Una asignación es **eficiente** cuando no es posible reasignar de modo que todos los agentes estén mejor. Finalmente, diremos que una asignación es **estable** cuando ningún subgrupo de agentes puede, con sus recursos iniciales, obtener una asignación mejor que la propuesta.

Como antes, el **Núcleo** de un problema de asignación es el conjunto de las asignaciones estables (que son, asimismo, individualmente racionales y eficientes).

El Núcleo de un problema de asignación es no vacío, como probaron Shapley y Scarf en 1974 [17]. Ellos presentan dos pruebas de este resultado, una de ellas constructiva, proporcionando un algoritmo para encontrar una solución. Este algoritmo (TTC), funciona de la siguiente manera:

Paso 1: Cada agente señala su mejor objeto. Como hay un número finito de agentes y objetos, hay por lo menos un ciclo. Los agentes y objetos del ciclo se asignan, y salen del problema.

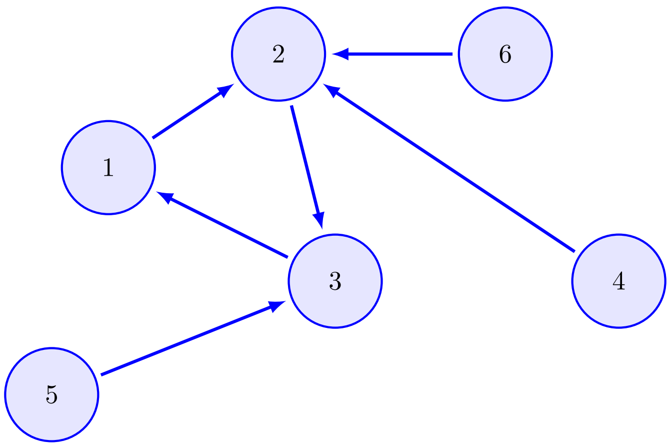
Paso 2: Cada agente que quedó sin asignar en la etapa anterior, señala su mejor objeto entre los que quedaron de la etapa anterior. Hay por lo menos un ciclo. Los agentes y objetos del ciclo se asignan, y salen del problema, etc.

Eventualmente, en un número finito de pasos, todos los agentes están asignados y el algoritmo termina.

Veamos un ejemplo. Sean seis pacientes, $(a_1, o_1), \ldots, (a_6, o_6) \in A \times O$ que entran juntos en el problema de intercambio. Las preferencias sobre los órganos de cada uno de los pacientes están dadas en la siguiente tabla, donde solo se ordenan los órganos compatibles, que son mejores que el del propio donante (recordemos que se entra en un programa de trasplante cruzado porque el órgano con el que se cuenta no es compatible):

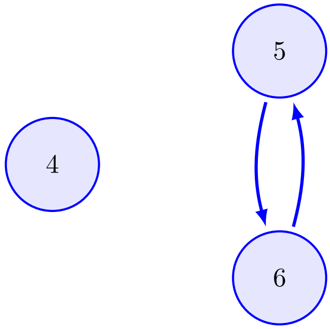
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
o_2	o_3	o_1	o_2	o_3	o_2
o_3	o_4	o_2		o_1	o_3
	o_5	o_4		o_6	o_4
	o_6	o_5		o_4	o_5
		o_6		o_2	o_1

Paso 1:



Se forma un ciclo con los agentes a_1, a_2, a_3, de forma que entre ellos queda la siguiente asignación: $\{(a_1, o_2), (a_2, o_3), (a_3, o_1)\}$. Quedan sin asignar los restantes agentes y órganos.

Paso 2:



Finalmente, a_5 y a_6 se intercambian sus órganos y a a_4 se le asigna su donante original. La asignación definitiva es $\{(a_1, o_2), (a_2, o_3), (a_3, o_1), (a_4, o_4), (a_5, o_6), (a_6, o_5)\}$.

En el ejemplo anterior todos los pacientes, salvo el a_4, reciben un riñón aceptable, mientras que el paciente a_4 no recibe ninguno, ya que, de los disponibles, el único compatible para él era el primero, pero no le fue asignado en el algoritmo.

Lo más interesante es que, en este caso (asignaciones de objetos indivisibles), el Núcleo contiene una única asignación, precisamente la obtenida mediante el algoritmo TTC, como probaron Roth y Postelwaite en 1997 [13]. Además, la asignación obtenida mediante este algoritmo no es manipulable, es decir, que nadie se puede beneficiar revelando preferencias falsas. La compatibilidad con los incentivos del algoritmo TTC fue demostrada por Roth en 1982 [9].

Una pregunta interesante, en el caso del problema de los trasplantes cruzados, es si no estamos exigiendo demasiado al pedir que la asignación sea estable, en el sentido de que no haya ninguna coalición que la pueda bloquear. En 1994, Ma [6] probó que es suficiente con que pidamos al mecanismo de asignación que sea *eficiente, individualmente racional y no manipulable,* para llegar, de nuevo, a la única asignación del Núcleo: la obtenida mediante el algoritmo TTC.

La propuesta de poner en práctica el algoritmo TTC para la asignación de trasplantes cruzados entre vivos proviene de Roth, Sönmez y Unver [15, 16]. Junto con los médicos Delmonico y Daidman, organizaron en 2004 el New England Program for Kidney Exchange (NEPKE). En 2005 lo siguieron el Johns Hopkins Kidney Exchange Program y otros. Ahora, el United Network for Organ Sharing (UNOS) está desarrollando un programa nacional de trasplantes cruzados, siguiendo el algoritmo TTC, en todos los EEUU. El pasado 26 de abril de 2013 se realizó con éxito el primer trasplante cruzado de riñón en España entre tres hospitales: Clinic de Barcelona, Bellvitge de L'Hospitalet de Llobregat y Carlos Haya de Málaga.

La asignación de estudiantes a las universidades

El tercer tipo de modelo que consideramos es el problema de asignación de estudiantes a universidades (o de escolares a colegios). Hay varias diferencias importantes respecto del modelo anterior. Por una parte, en uno de los lados del mercado (las universidades o los colegios) hay más de una plaza ofertada, es decir, cada universidad ofrece un determinado número de plazas algunas de las cuales son percibidas como idénticas por los estudiantes. Por otra parte, el papel de las universidades es pasivo, es decir, son los estudiantes los que solicitan plaza y las universidades (o colegios) se limitan a aceptar o rechazar al estudiante. El problema de la admisión de estudiantes se abordó por primera vez en el trabajo de Gale y Shapley de 1962 [4]. Desde el principio queda claro que el modelo de la admisión de estudiantes y el de la asignación de matrimonios, tienen importantes diferencias (véase al respecto el artículo de Roth [10]).

Uno de los mecanismos utilizados en la admisión de estudiantes es el conocido como *Mecanismo de Boston*, utilizado en la ciudad de Boston para asignar alumnos a las escuelas. En este mecanismo, los alumnos (o sus padres, en el caso de las escuelas) ordenan los colegios según sus preferencias y cada escuela ofrece un determinado número de plazas. El Mecanismo de Boston pretende satisfacer la primera opción del mayor número de familias. Para conseguir esto, funciona de la siguiente manera:

Paso 1: Cada alumno remite su solicitud a su primera opción. Recibidas estas solicitudes, las escuelas aceptan, de acuerdo a un determinado orden de prioridad, hasta un máximo de alumnos dado por el número de plazas que han ofertado, y rechazan a los estudiantes que sobrepasan esta cuota.

Paso 2: Los estudiantes que han sido rechazados en la primera etapa pasan a solicitar su segunda opción, pero solo entre las escuelas que aún tienen plazas. Las escuelas aceptan las solicitudes, de acuerdo a su orden de prioridad, hasta un máximo dado por sus plazas restantes, y rechazan a los sobrantes.

Paso 3: Si quedan aún estudiantes sin asignar, y plazas vacantes en algunas escuelas, se vuelve a repetir el proceso, donde ahora los estudiantes solicitan su tercera opción, etc.

El proceso termina cuando todos los alumnos han sido asignados o no hay plazas vacantes en ninguna escuela.

Veamos un ejemplo. Tenemos seis estudiantes $\{e_1, e_2, \ldots, e_6\}$ y tres escuelas $\{s_1, s_2, s_3\}$, con dos plazas cada una. Las preferencias de los estudiantes están dadas en la siguiente tabla:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
s_1	s_1	s_2	s_2	s_2	s_2
s_2	s_2	s_1	s_1	s_1	s_1
s_3	s_3	s_3	s_3	s_3	s_3

Todas las escuelas tienen las mismas preferencias: $e_3 > e_6 > e_4 > e_1 > e_2 > e_5$. La solución dada por el Mecanismo de Boston a este problema sería la siguiente:

Paso 1: En la primera etapa, los dos primeros estudiantes se asignan a la primera escuela, y los estudiantes tercero y sexto se asignan a la segunda escuela. Los dos restantes estudiantes quedan sin asignar.

Paso 2: En la segunda etapa, como solo quedan plazas en la escuela s_3, los estudiantes no asignados quedan en la tercera escuela. **FIN**

La asignación final sería $\{(e_1, s_1), (e_2, s_1), (e_3, s_2), (e_4, s_3), (e_5, s_3), (e_6, s_2)\}$.

Si bien el Mecanismo de Boston es un proceso de asignación para este problema, desde la perspectiva de los modelos de emparejamiento tiene una debilidad fundamental, y es su falta de estabilidad.

En el ejemplo anterior, la escuela s_1 prefiere al estudiante e_4 antes que a ninguno de los que le han sido asignados, y el estudiante e_4 prefiere la escuela s_1 antes que la que le ha correspondido. El hecho de que la asignación de Boston no sea estable provoca problemas de falta de compatibilidad con los incentivos. Es decir, los alumnos tienen incentivos para mentir a la hora de revelar sus preferencias. Así, el estudiante e_4 obtendría un mejor resultado fingiendo que su mejor opción es s_1 en lugar de su verdadera primera opción, s_2.

Abdulkadiroglu, Pathak, Roth y Sönmez propusieron en 2005 [1] una modificación del método de Boston que evitara estos inconvenientes, adaptando el algoritmo de Gale y Shapley al caso de asignación de escuelas. La modificación consiste en tomar la primera asignación como tentativa y dejar que, en la segunda etapa, las escuelas puedan reconsiderar las admisiones provisionales realizadas en la primera etapa. De esta forma se obtiene un emparejamiento con todas las propiedades deseables. Esta modificación del Mecanismo de Boston se utiliza en la actualidad para la asignación de escuelas en muchos lugares de EEUU.

Así, en el ejemplo anterior, el mecanismo de Boston modificado funcionaría de la siguiente manera:

Paso 1: Se considera la asignación provisional

$$\{(e_1, s_1), (e_2, s_1), (e_3, s_2), (e_6, s_2)\}.$$

Los estudiantes cuarto y quinto quedan sin asignar.

Paso 2: Se mira la segunda opción de e_4, s_1, y es aceptado, desplazando a e_2. Se mira la segunda opción de e_5, s_1, y es rechazado. Se crea el emparejamiento (e_4, s_1). Los estudiantes segundo y quinto quedan sin asignar.

Paso 3: Se mira la segunda opción de e_2, s_2, y es rechazado. La tercera opción de e_5 es s_3 y se crea la pareja (e_5, s_3).

Paso 4: La tercera opción de e_2 es s_3 y se crea la pareja (e_2, s_3). **FIN**

El emparejamiento obtenido ahora sería

$$\{(e_1, s_1), (e_2, s_3), (e_3, s_2), (e_4, s_1), (e_5, s_3), (e_6, s_2)\}.$$

Hay diversas extensiones interesantes de este problema, por ejemplo cuando los estudiantes tienen solo un número fijo de solicitudes posibles, como ocurre en los sistemas de asignación centralizados (es el caso español, analizado por Romero-Medina en 1998 [7]) o cuando aparecen ciertas reglas de prioridad adicionales, como el caso de hermanos o la introducción de beneficios para ciertos tipos de estudiantes (minorías). La compatibilidad con los incentivos la han analizado Kara y Sönmez [5].

La asignación de estudiantes es un problema similar al de asignación de médicos a especialidades en el MIR. En este caso, un problema que aparece con frecuencia es el de la existencia de parejas que desean trabajar en la misma ciudad o en el mismo centro. Estas y otras extensiones han sido analizadas por Roth y Peranson [13]. Estos procedimientos han permitido también mejorar las asignaciones de MIR a hospitales.

Comentarios finales

En este trabajo hemos presentado una introducción a los modelos de emparejamiento, base de la concesión del Premio Nobel de Economía 2012 a los matemáticos y economistas Alvin Roth y Lloyd Shapley.

La construcción, análisis y resolución de los modelos de emparejamiento es un ejemplo de análisis, experimentación y diseño, camino por el que el desarrollo de la Economía como ciencia está transcurriendo, cada vez más, en los últimos tiempos. En palabras de Roth [11], «en el papel de los economistas como diseñadores de soluciones prácticas ha tenido un papel importantísimo la Teoría de Juegos, pero para avanzar en el conocimiento se debe suplementar este papel con experimentación y computación». La idea que Roth quiere transmitir es que hay que dar un paso más en el análisis del diseño: hay que enseñar lo que hemos aprendido, cambiar la teoría por la práctica, complementarla, mirar los datos y analizarlos desde la óptica de aprender a diseñar. Esta dinámica, a su vez, plantea nuevas cuestiones a la teoría, que esta tiene que esforzarse en responder y así hacer avanzar el conocimiento.

Un elemento a destacar es que este tipo de literatura es interesante para los profesores de Matemáticas, por razones didácticas. Según las propias palabras de Gale y Shapley [4],

> «analizar estos modelos es un contraejemplo sencillo de algunos de los estereotipos que los no matemáticos suelen albergar respecto de la forma de pensar de los matemáticos. Muchos matemáticos, en uno u otro momento de su vida, han tenido que refutar la idea de que ellos son personas "con una cabeza especial para los números" o que "conocen un montón de fórmulas". En esas ocasiones es conveniente poder tener a mano una ilustración que muestre que los matemáticos no necesariamente se tienen que preocupar por los números, o por las figuras geométricas. Los razonamientos y las pruebas en los problemas de emparejamiento no se realizan mediante símbolos matemáticos, sino en castellano corriente. No aparecen términos oscuros o temas técnicos complicados. No hace falta ningún conocimiento de Análisis Matemático. De hecho, casi no hace falta más que saber contar. Sin embargo, cualquier matemático reconoce los argumentos como razonamiento matemático, mientras que las personas sin ningún conocimiento matemático pueden tener dificultades para seguir la argumentación, aunque esta dificultad no proviene del descono-

cimiento del asunto en cuestión. Aparece entonces la vieja pregunta: ¿qué es un razonamiento matemático? La respuesta más razonable parece ser que cualquier argumentación que se lleva a cabo con suficiente precisión es matemática, y la razón por la que muchas personas no son capaces de entender las matemáticas no es porque no tengan "cabeza para los números", sino porque no son capaces de conseguir el grado de concentración necesario para seguir una sucesión moderada de inferencias lógicas».

Referencias

[1] A. Abdulkadiroğlu, P.A. Pathak, A. Roth y T. Sönmez, The Boston Public School match, *American Economic Review* **95** (2) (2005), 368–371.

[2] J. Alcalde, Implementation of Stable solutions to the marriage problem, *Journal of Economic Theory* **69** (1996), 240–254.

[3] J. Alcalde y S. Barberà, Top dominance and the possibility of strategy-proof stable allocations to matching problems, *Economic Theory* **4** (1994), 417–435

[4] D. Gale y L.S. Shapley, College admissions and the stability of the marriage, *American Mathematical Monthly* **69** (1962), 9–15.

[5] T. Kara y T. Sönmez, Implementation of College Admission Rules, *Economic Theory* **9** (1997), 197–218.

[6] J. Ma, Strategy-proofness and the strict core in a market with indivisibilities, *International Journal of Game Theory* **23** (1994), 75–83.

[7] A. Romero-Medina, Implementation of Stable Solutions in a Restricted Matching Market, *Review of Economic Design* **3** (1998), 137–147.

[8] A.E. Roth, The economics of matching: stability and incentives, *Math. Op. Research* **7** (1982), 617–628.

[9] A.E. Roth, Incentive compatibility in a market with indivisible goods, *Economics Letters* **9** (1982), 127–132.

[10] A.E. Roth, The College Admissions Problem is not Equivalent to the Marriage Problem, *Journal of Economic Theory* **36** (1985), 277–288.

[11] A.E. Roth, The Economist as Engineer: Game Theory, Experimentation and Computation as tools for Design Economics, *Econometrica* **70** (4) (2002), 1341–1378.

[12] A.E. Roth y M.A. Oliveira Sotomayor, *Two-sided matching: A study in Game Theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monograhs **18**, Cambridge U. Press, 1990.

[13] A.E. Roth y E. Peranson, The effects on the change in the NRPM Matching algorithm, *Journal of the American Medical Association* **278** (1997), 729–732.

[14] A.E. Roth y A. Postlewaite, Weak versus strong domination in a market with indivisible goods, *Journal of Mathematical Economics* **4** (1977), 131–137.

[15] A.E. Roth, T. Sönmez y U. Ünver, Kidney exchange, *Quarterly Journal of Economics* **119** (2004), 457–488.

[16] A.E. ROTH, T. SÖNMEZ Y U. ÜNVER, Pairwise kidney exchange, *Journal of Economic Theory* **125** (2005), 151–188.

[17] L. SHAPLEY Y H. SCARF, On Cores and indivisibilities, *Journal of Mathematical Economics* **1** (1974), 23–28.

CARMEN HERRERO, DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS ECONÓMICO, UNIVERSIDAD DE ALICANTE, E INSTITUTO VALENCIANO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS (IVIE)

Correo electrónico: Carmen.Herrero@ua.es

Página web: http://fae.ua.es/FAEEnglish/carmen-herrero-blanco/