Lo mínimo que debe uno saber sobre superficies mínimas

por

Daniel Álvarez Gavela

Resumen. En este trabajo se abordan algunas cuestiones relativas a la ecuación de la superficie mínima y su problema de Dirichlet asociado. Seguiremos los pasos de Giusti, caracterizando las condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de soluciones a dicho problema, obteniendo sencillos criterios geométricos sobre la frontera del dominio en cuestión. Omnipresente en el reino de las superficies mínimas, el concepto de curvatura media jugará un papel protagonista. Por otra parte se presentarán diversas estimaciones y acotaciones que pondrán de manifiesto la importancia del principio del máximo, siendo aquí clave la convexidad del funcional del área.

Sorprendidos por los populares experimentos con pompas de jabón y deleitados con maravillas arquitectónicas como el tejado del estadio olímpico de Munich, resulta difícil encontrar una presentación novedosa del concepto de superficie mínima. De un tiempo a esta parte, estos objetos han ganado popularidad, no sólo entre los matemáticos, aunque quizá lo que no se conozca tan bien sea el desarrollo histórico de la teoría.

La aventura comienza en 1762 con Lagrange en su famosa memoria *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, donde desarrolla el algoritmo que, generalizado a más dimensiones, daría como resultado las que hoy conocemos como ecuaciones de Euler-Lagrange. Los ejemplos discutidos incluyen el siguiente: tomemos un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ y un dato $U : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ (Lagrange solamente lo consideró para $N = 2$, pero nosotros trabajaremos en dimensión arbitraria estudiando *hiper*superficies mínimas, aunque seguiremos la terminología clásica hablando, por ejemplo, de área en vez de volumen N-dimensional). Queremos determinar, de entre todas las hipersuperficies en $\mathbb{R}^{N+1}$ que son la gráfica de una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que coincide con U en $\partial\Omega$, aquella que tiene área mínima. Se nos plantean inmediatos problemas de existencia y unicidad que serán tratados a su debido tiempo, al igual que las pertinentes condiciones de regularidad sobre los objetos que vamos a manejar. De momento, tomemos cualquier $u : \Omega \to \mathbb{R}$ con $u|_{\partial\Omega} = U$. Si D denota el operador gradiente y m la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^N$, el área de esta hipersuperficie es

$$\mathcal{A}(u, \Omega) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, dm,$$

y queremos encontrar condiciones necesarias y suficientes para que u sea un mínimo de $\mathcal{A}(\cdot, \Omega)$, al que llamamos el funcional del área, con el dato de frontera U. Supon-

gamos que de hecho u es un mínimo, al menos local. Entonces si $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ se anula en $\partial\Omega$, la función

$$g(t) = \mathcal{A}(u + t\varphi, \Omega) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du + tD\varphi|^2}\, dm$$

tiene un mínimo local en $t = 0$, y por lo tanto $g'(0) = 0$. Ahora bien,

$$\frac{d}{dt}\sqrt{1 + |Du + tD\varphi|^2} = \frac{Du \cdot D\varphi + t|D\varphi|^2}{\sqrt{1 + |Du + tD\varphi|^2}},$$

luego derivando bajo el signo integral y evaluando en $t = 0$ llegamos a la condición

$$\int_\Omega \frac{Du \cdot D\varphi}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\, dm = 0.$$

Sin embargo, φ se anula en $\partial\Omega$, y por lo tanto podemos integrar por partes para obtener la condición equivalente

$$\int_\Omega \operatorname{div}\Big(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\Big)\varphi\, dm = 0,$$

que en vistas de la arbitrariedad de φ implica

$$\operatorname{div}\Big(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\Big) = 0.$$

De aquí Lagrange dedujo la ecuación de la superficie mínima tal y como la conocemos (en el caso de dos dimensiones):

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0.$$

Fue Euler quien se dio cuenta de que la superficie de revolución obtenida al rotar la catenaria respecto de un eje horizontal externo minimiza el área en cierto sentido, y Meusnier descubrió que, en efecto, el catenoide, y de hecho también el helicoide, satisfacen la condición de Lagrange. Pero Meusnier fue más allá y supo detectar la conexión entre la minimalidad de la superficie y la anulación de una cierta cantidad geométrica, hoy conocida como curvatura media. Como pronto veremos, la curvatura media es un concepto que juega un papel importantísimo en el estudio de nuestra ecuación.

Hubo que esperar a la siguiente década cuando, primero Monge en 1784 y luego Legendre en 1787, entre otros, integraron la ecuación de Lagrange obteniendo fórmulas para las coordenadas de varias superficies mínimas en términos de funciones analíticas. La investigación quedó entonces de nuevo estancada hasta que, en 1831, Scherk utilizó las fórmulas de representación de Monge-Legendre para ampliar el repertorio de las superficies mínimas reales conocidas. Floreció entonces el estudio de estos objetos y, desde 1855, las superficies mínimas han ofrecido a la matemática un punto de encuentro entre distintos campos, donde a lo largo de las décadas los

hermosos ejemplos explícitos han complementado a la teoría general para constituir un majestuoso edificio.

En la actualidad, el problema se ha generalizado de forma extravagante, siendo notable su interacción con la física, por ejemplo dictando la estática de películas flexibles e inextensibles, o proporcionando herramientas para ciertas construcciones en la teoría de la relatividad, entre otras aplicaciones.

La ecuación misma aparece con gran protagonismo en otros campos de las matemáticas, mientras que aspectos más geométricos como el de las propiedades de intersección de superficies mínimas dentro de otras variedades han resultado útiles en el estudio de la topología de baja dimensión. Una narración más extensa del apasionante desarrollo histórico del estudio de las superficies mínimas y de su ecuación se encuentra en la excelente referencia [5], de donde proviene nuestra breve discusión del tema.

Será nuestro propósito estudiar el funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ en el espacio $\mathrm{Lip}(\Omega)$ de las funciones $u:\Omega\to\mathbb{R}$ para las que existe una constante $C>0$ tal que $|u(x)-u(y)|\leq C|x-y|$ para todo $x,y\in\Omega$. Se hará evidente, a medida que se progresa en el estudio del funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$, la importancia de este espacio de funciones que lleva el nombre de Lipschitz, matemático que dio el paso de generalizar y estudiar el problema de Lagrange en dimensiones superiores. Veremos que con poco trabajo obtendremos resultados muy precisos de existencia y unicidad para mínimos, con condiciones que dependen únicamente de la geometría del abierto Ω.

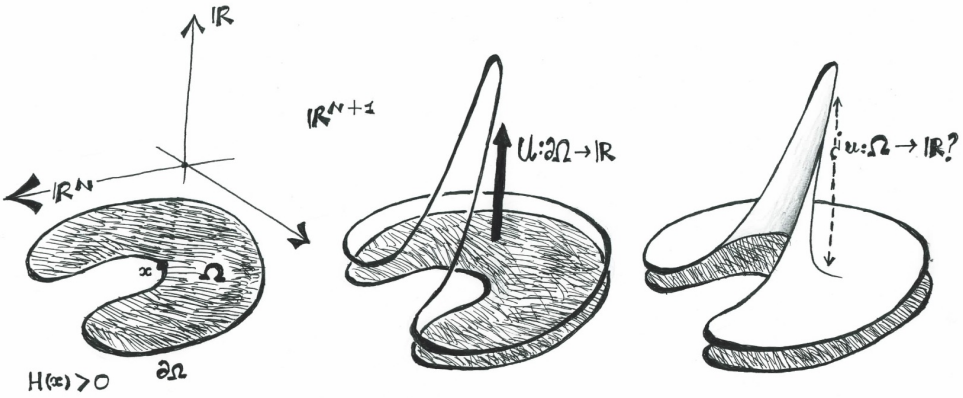
Entendemos que estos resultados muestran una caracterización muy sencilla de los dominios en los que el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de la superficie mínima tiene solución, al menos en el sentido débil, y que por ello merece ser divulgado como un hecho de interés general que todo matemático debería conocer. En efecto, demostraremos el siguiente resultado que por claridad presentamos en dos partes:

Teorema A. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2. Si la curvatura media H de $\partial\Omega$ satisface $H(x)\leq 0$ en todo $x\in\partial\Omega$, entonces para todo dato $U\in C^2(\partial\Omega)$ el funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ admite un mínimo único en el espacio $\mathrm{Lip}(\Omega,U)$ de las funciones que son Lipschitz en Ω y que coinciden con U en $\partial\Omega$.*

Teorema B. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2. Si la curvatura media H de $\partial\Omega$ satisface $H(x)>0$ en al menos un punto $x\in\partial\Omega$, entonces existe un dato $U\in C^2(\partial\Omega)$ para el cual el funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ no tiene mínimo en el espacio $\mathrm{Lip}(\Omega,U)$ de las funciones que son Lipschitz en Ω y que coinciden con U en $\partial\Omega$.*

Estos resultados de existencia y de no existencia serán nuestro objetivo en las páginas que siguen.

Debemos precisar que orientamos a $\partial\Omega$ mediante su normal exterior (es decir, como frontera de Ω), de modo que los convexos tienen frontera con curvatura media no positiva. Intuitivamente, el hecho de que la condición $H\leq 0$ sea necesaria se puede entender de la siguiente manera. Supongamos que $H(x)>0$ en algún punto $x\in\partial\Omega$. Tomemos una función U de clase C^2 en $\partial\Omega$ que sea cero excepto en un entorno muy pequeño de x, donde la hacemos muy grande. Podemos observar en



la figura adjunta que la superficie que intuitivamente debiera tener área mínima de entre todas aquellas que tienen a la gráfica de U como borde no es la gráfica de una función u definida sobre Ω. De hecho, u estaría forzada a tomar dos valores en el punto x, cosa del todo indeseable. Observemos además que en este fenómeno sólo influye la naturaleza de la geometría de $\partial\Omega$ en un entorno arbitrariamente pequeño, de ahí que la condición sea puramente local. Podemos intentar aproximar la superficie dibujada por superficies que sí son gráficas y que tienen cada vez área menor, pero en el límite degeneran en la vertical sobre el punto x; de ahí que no exista un mínimo. Esperamos que esta discusión haya ilustrado en cierta forma la necesidad de la condición $H \leq 0$.

No pasa lo mismo, sin embargo, si nos restringimos a funciones con la constante de Lipschitz acotada. En este caso vemos que nuestro anterior ejemplo no es aplicable ya que las pendientes se agudizaban cada vez más, de modo que las constantes de Lipschitz asociadas se disparan por encima de cualquier cota. En efecto, veremos que siempre existen mínimos en el espacio $\mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$ de las funciones de $\mathrm{Lip}(\Omega, U)$ con constante de Lipschitz no superior a k, para cualquier $k > 0$.

Uno podría quejarse de la poca regularidad exigida para estos mínimos. Al fin y al cabo, nos gustaría que las superficies mínimas fueran algo más suaves, y nuestra intuición parece indicar que cualquier «pico» interno se podría suavizar reduciendo el área localmente. Resulta que nuestra intuición es correcta y se puede demostrar que, siempre bajo la hipótesis de curvatura media no positiva, los mínimos del funcional del área son de clase $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ para cualquier dato $U \in C^2(\partial\Omega)$. No demostraremos esto aquí, y remitimos al lector interesado a la segunda parte de [1], en la que se demuestra este resultado, además de todo lo que expondremos aquí y muchísimo más. La discusión que sigue está basada en el primer capítulo de [2], que por otra parte está contenido también en [1]. Otra fantástica introducción a las superficies mínimas en un espíritu notablemente distinto es [6].

Se ha intentado mantener el enfoque en el problema que nos concierne, pero a la vez sería absurdo desaprovechar la oportunidad de observar que una gran parte de la teoría desarrollada en las páginas que siguen es completamente generalizable

a funcionales

$$\mathcal{F}(u,\Omega)=\int_\Omega F(Du)\,dm$$

con $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ una función convexa. La única sutileza es que en algunos resultados es necesaria la convexidad estricta, aunque incluso en muchas demostraciones que utilizan esta propiedad se pueden adaptar los argumentos considerando $F_\varepsilon(z)=F(z)+\varepsilon|z|^2$ y pasando al límite cuando $\varepsilon\to 0$.

1. El principio del máximo

Comenzamos nuestro estudio del funcional

$$\mathcal{A}(u,\Omega)=\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\,dm.$$

Es importante observar que $F(z)=\sqrt{1+|z|^2}$ es una función convexa, es decir,

$$F(tx+(1-t)y)\le tF(x)+(1-t)F(y)\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^N,\quad 0\le t\le 1.$$

De hecho F es estrictamente convexa, ya que, si $x\neq y$ y $0<t<1$, la desigualdad anterior es estricta. Tendremos $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un abierto acotado, y la clase de funciones u que consideraremos es $\mathrm{Lip}(\Omega)=C^{0,1}(\bar\Omega)$. Recordemos que $u\in\mathrm{Lip}(\Omega)$ si y sólo si $u\in C(\overline{\Omega})$ y $[u]_{0,1}<\infty$, donde

$$[u]_{0,1}=\sup_{x,y\in\Omega,\,x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\,.$$

Es claro que $\mathrm{Lip}(\Omega)$ es un espacio de Banach equipado con la norma $\|u\|_{0,1}=\|u\|_\infty+[u]_{0,1}$. Además, por su continuidad absoluta, no es difícil ver que, dado $u\in\mathrm{Lip}(\omega)$, su derivada Du existe en casi todo punto y, de hecho, $\|Du\|_\infty\le[u]_{0,1}$ (luego nuestro funcional está bien definido en $\mathrm{Lip}(\Omega)$). Además, Du coincide con la derivada distribucional de u, en tanto que

$$\int_\Omega u_{x_j}\,\varphi\,dm=-\int_\Omega u\,\varphi_{x_j}\,dm$$

para cada función test $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$.

Definimos ahora algunas subclases de $\mathrm{Lip}(\Omega)$. Sea $U:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ nuestro dato en la frontera. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}_k(\Omega)&=\{u\in\mathrm{Lip}(\Omega):[u]_{0,1}\le k\},\\ \mathrm{Lip}(\Omega,U)&=\{u\in\mathrm{Lip}(\Omega):u|_{\partial\Omega}=U\},\\ \mathrm{Lip}_k(\Omega,U)&=\{u\in\mathrm{Lip}_k(\Omega):u|_{\partial\Omega}=U\}.\end{aligned}$$

Comenzamos con un primer resultado de existencia:

Proposición. *Si $U\in\mathrm{Lip}_k(\Omega)$, el funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ admite un mínimo en $\mathrm{Lip}_k(\Omega,U)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mu = \inf \mathcal{A}(u, \Omega)$ el ínfimo tomado sobre todas las funciones $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$. Observemos que $\mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$ contiene a U y por lo tanto es no vacío, de modo que podemos tomar el ínfimo μ. Consideremos una sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$ tal que $\mathcal{A}(u_n, \Omega) \to \mu$. Dados $x \in \Omega$ e $y \in \partial\Omega$, se tiene

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |u_n(x) - u_n(y)| + |u_n(y)| \\ &= \frac{|u_n(x) - u_n(y)|}{|x - y|} |x - y| + |U(y)| \leq k \operatorname{diam}(\Omega) + \|U\|_{\infty}, \end{aligned}$$

con lo cual $\|u_n\|_{\infty} \leq k \operatorname{diam}(\Omega) + \|U\|_{\infty}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, la sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ está uniformemente acotada. Pero por definición tenemos

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq k|x - y| \qquad \forall x, y \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

luego la sucesión es también equicontinua. Así pues, por el teorema de Ascoli-Arzelà podemos suponer, pasando a una subsucesión, que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a una función $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$ (sabemos que u es continua, es claro que $[u]_{0,1} \leq k$ pasando al límite en la desigualdad anterior cuando $n \to \infty$, y de igual manera para cada $x \in \partial U$ tenemos $u_n(x) = U(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto debe ser $u(x) = U(x)$).

Por otra parte, por ser F convexa existe una función medible $\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, acotada sobre compactos, tal que

$$F(w) \geq F(z) + \lambda(z) \cdot (w - z) \qquad \forall z, w \in \mathbb{R}^N,$$

con lo cual

$$\int_{\Omega} F(Du_n)\, dm \geq \int_{\Omega} F(Du)\, dm + \int_{\Omega} \lambda(Du) \cdot (Du_n - Du)\, dm$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, $\lambda(Du) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es medible y acotada, y por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar funciones $g_j \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tales que

$$g = (g_1, \ldots, g_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$$

satisface

$$\int_{\Omega} |\lambda(Du) - g|\, dm < \varepsilon.$$

Además,

$$(g - \lambda(Du)) \cdot (Du_n - Du) \leq |g - \lambda(Du)|\, |Du_n - Du| \leq 2k|g - \lambda(Du)|,$$

luego

$$\int_{\Omega} g \cdot (Du_n - Du)\, dm - \int_{\Omega} \lambda(Du) \cdot (Du_n - Du)\, dm \leq 2k\varepsilon.$$

Como las derivadas clásicas de u y u_n coinciden con su derivadas distribucionales,

$$\int_{\Omega} g \cdot (Du_n - Du)\, dm = -\int_{\Omega} \operatorname{div}(g)(u_n - u)\, dm,$$

y hemos demostrado la desigualdad

$$\mathcal{A}(u_n, \Omega) \geq \mathcal{A}(u, \Omega) - \int_\Omega \operatorname{div}(g)(u_n - u)\, dm - 2k\varepsilon$$

que, pasando al límite en $n \to \infty$, resulta en

$$\mu \geq \mathcal{A}(u, \Omega) - 2k\varepsilon$$

puesto que $u_n \to u$ uniformemente y $\operatorname{div}(g)$ es acotada en Ω. Pero $\varepsilon > 0$ era arbitrario, luego $\mathcal{A}(u, \Omega) \leq \mu$, y como la desigualdad contraria es obvia por definición de μ, tenemos $\mathcal{A}(u, \Omega) = \mu$, es decir, u minimiza $\mathcal{A}(\cdot, \Omega)$ en $\operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$. □

Veamos ahora cómo podemos pasar de una solución minimizante en $\operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$ a una minimizante en todo $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$.

Proposición. *Sea u una función que minimiza a $\mathcal{A}(\cdot, \Omega)$ en $\operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$. Supongamos que $[u]_{0,1} < k$. Entonces u minimiza a $\mathcal{A}(\cdot, \Omega)$ en todo $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$.*

Demostración. Sea $v \in \operatorname{Lip}(\Omega, U)$, y para $0 < t < 1$ definamos $v_t = u + t(v - u)$. Claramente $v_t|_{\partial\Omega} = U$, y para t chico es $[v_t]_{0,1} < k$ por continuidad. Tomemos pues $t_0 > 0$ tal que $v_{t_0} \in \operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$. Por minimizar u a $\mathcal{F}(\cdot, \Omega)$ en este espacio es

$$\mathcal{A}(u, \Omega) \leq \mathcal{A}(v_{t_0}, \Omega) \leq (1 - t_0)\mathcal{A}(u, \Omega) + t_0\mathcal{A}(v, \Omega)$$

de modo que $t_0\mathcal{A}(u, \Omega) \leq t_0\mathcal{A}(v, \Omega)$ y por lo tanto $\mathcal{A}(u, \Omega) \leq \mathcal{A}(v, \Omega)$. □

Refinaremos ahora nuestras definiciones:

Definición. Decimos que $\omega \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ es un *super-mínimo* de $\mathcal{A}_k(\cdot, \Omega)$ si para toda $\theta \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ tal que $\theta = \omega$ en $\partial\Omega$ y $\theta \geq \omega$ en Ω se tiene

$$\mathcal{A}(\omega, \Omega) \leq \mathcal{A}(\theta, \Omega).$$

Similarmente, decimos que $\eta \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ es un *sub-mínimo* de $\mathcal{A}_k(\cdot, \Omega)$ si para toda $\theta \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ tal que $\theta = \eta$ en $\partial\Omega$ y $\theta \leq \eta$ en Ω se tiene

$$\mathcal{A}(\eta, \Omega) \leq \mathcal{A}(\theta, \Omega).$$

Por último, decimos que $u \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ es un *mínimo* de $\mathcal{A}_k(\cdot, \Omega)$ si para toda $\theta \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ tal que $\theta = u$ en $\partial\Omega$ se tiene

$$\mathcal{A}(u, \Omega) \leq \mathcal{A}(\theta, \Omega).$$

Diremos también que $u \in \operatorname{Lip}(\Omega)$ es un super-mínimo, sub-mínimo o mínimo de $\mathcal{A}(\cdot, \Omega)$ si lo es de $\mathcal{A}_k(\cdot, \Omega)$ para todo $k > 0$. Es claro que si u es un mínimo, entonces es sub-mínimo y super-mínimo. El reciproco también es cierto, como ahora veremos.

Lema. ***1.*** *Si tenemos funciones $u, v \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ y definimos $\alpha(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ y $\beta(x) = \min\{u(x), v(x)\}$, entonces $\alpha, \beta \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$.*

2. *Si $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ es sub-mínimo y super-mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$, entonces u es un mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$.*
3. *Si $\Delta \subset \Omega$ y $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ es sub-mínimo, super-mínimo o mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$, entonces $u|_\Delta \in \mathrm{Lip}_k(\Delta)$ es respectivamente un sub-mínimo, super-mínimo o mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Delta)$.*

DEMOSTRACIÓN. **1.** Sean $x, y \in \Omega$ puntos distintos y consideremos el cociente $|\alpha(x) - \alpha(y)|/|x - y|$. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $\alpha(x) \geq \alpha(y)$ y que $u(x) \geq v(x)$. Entonces, como $\alpha(y) \geq u(y)$ tenemos

$$\frac{|\alpha(x) - \alpha(y)|}{|x - y|} = \frac{u(x) - \alpha(y)}{|x - y|} \leq \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|} \leq k$$

y, por lo tanto, tomando supremos obtenemos $[\alpha]_{0,1} \leq k$, de modo que $\alpha \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$. Como $\beta(x) = -\max\{-u(x), -v(x)\}$, también $\beta \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$.

2. En efecto, dado $v \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ tal que $v = u$ en $\partial\Omega$, consideremos a α y β como en **1**. Se tiene $\alpha = u$ y $\beta = u$ en $\partial\Omega$, y por supuesto $\alpha \geq u$ y $\beta \leq u$. Por ser u sub-mínimo y super-mínimo deducimos que

$$\mathcal{A}(u,\Omega) \leq \mathcal{A}(\alpha,\Omega), \qquad \mathcal{A}(u,\Omega) \leq \mathcal{A}(\beta,\Omega).$$

Pero si $\Delta = \{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}$ y $\Gamma = \{x \in \Omega : u(x) \leq v(x)\}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(u,\Omega) &= \int_\Delta F(Du)\,dm + \int_\Gamma F(Du)\,dm,\\
\mathcal{A}(\alpha,\Omega) &= \int_\Delta F(Du)\,dm + \int_\Gamma F(Dv)\,dm,\\
\mathcal{A}(\beta,\Omega) &= \int_\Delta F(Dv)\,dm + \int_\Gamma F(Du)\,dm,
\end{aligned}$$

puesto que $\alpha = u$ y $\beta = v$ en Δ mientras que $\alpha = v$ y $\beta = u$ en Γ. Las desigualdades resultan en

$$\int_\Delta F(Du)\,dm \leq \int_\Delta F(Dv)\,dm, \qquad \int_\Gamma F(Du)\,dm \leq \int_\Gamma F(Dv)\,dm,$$

que sumadas implican

$$\mathcal{A}(u,\Omega) = \int_\Omega F(Du)\,dm \leq \int_\Omega F(Dv)\,dm = \mathcal{A}(v,\Omega),$$

y hemos probado que u es un mínimo.

3. Supongamos primero que $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ es super-mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$. Sea $\vartheta \in \mathrm{Lip}_k(\Delta)$ tal que $\vartheta = u$ en $\partial\Delta$ y $\vartheta \geq u$ en Δ. Definamos $\theta \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ como $\theta(x) = \vartheta(x)$ si $x \in \Delta$ y $\theta(x) = u(x)$ si $x \notin \Delta$. Para ver que $[\theta]_{0,1} \leq k$ tomemos $x, y \in \Omega$ puntos distintos. Tenemos que demostrar que

$$\frac{|\theta(x) - \theta(y)|}{|x - y|} \leq k.$$

Si x e y están ambos en $\Delta \cup \partial\Delta$ o ambos en $\Omega - \Delta$, esto es trivial. Pero podemos reducir a este caso, puesto que si $x \in \Delta$ e $y \notin \Delta$ podemos tomar $z \in \partial\Delta$ en el segmento que une x con y de forma que

$$\begin{aligned}\frac{|\theta(x)-\theta(y)|}{|x-y|} &\leq \frac{|\theta(x)-\theta(z)|}{|x-y|} + \frac{|\theta(z)-\theta(y)|}{|x-y|} \\ &= \frac{|x-z|}{|x-y|}\frac{|\theta(x)-\theta(z)|}{|x-z|} + \frac{|z-y|}{|x-y|}\frac{|\theta(z)-\theta(y)|}{|z-y|} \leq k\frac{|x-z|+|z-y|}{|x-y|} = k.\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\theta = u$ en $\partial\Omega$ y $\theta \geq u$ en Ω, debe ser $\mathcal{A}(u,\Omega) \leq \mathcal{A}(\theta,\Omega)$. Además, igual que en la demostración de **2**, tenemos, con $\Gamma = \Omega - \Delta$,

$$\mathcal{A}(u,\Omega) = \int_\Delta F(Du)\,dm + \int_\Gamma F(Du)\,dm, \quad \mathcal{A}(\theta,\Omega) = \int_\Delta F(D\vartheta)\,dm + \int_\Gamma F(Du)\,dm$$

puesto que $\theta = \vartheta$ en Δ y $\theta = u$ en Γ. Deducimos pues

$$\mathcal{A}(u,\Delta) \leq \mathcal{A}(\vartheta,\Delta),$$

demostrando que $u|_\Lambda \in \mathrm{Lip}_k(\Lambda)$ es super-mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Lambda)$.

De manera completamente análoga demostramos que si $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ es sub-mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$, entonces $u|_\Delta \in \mathrm{Lip}_k(\Delta)$ es sub-mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Delta)$. Por último, si $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ es mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$, entonces es super-mínimo y sub-mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$. En consecuencia, hemos demostrado que $u|_\Delta \in \mathrm{Lip}_k(\Delta)$ es tanto super-mínimo como sub-mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Delta)$, y por **2** se deduce que $u|_\Delta \in \mathrm{Lip}_k(\Delta)$ es mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Delta)$. Esto concluye la demostración. □

Demostramos ahora el primer resultado profundo sobre nuestro funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$.

Principio del máximo. *Sean $\omega, \eta \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ respectivamente un super-mínimo y un sub-mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$. Supongamos además que $\eta \leq \omega$ en $\partial\Omega$. Entonces $\eta \leq \omega$ en todo Ω.*

Demostración. Si la conclusión no fuese cierta, el abierto $\Delta = \{x \in \Omega : \omega(x) < \eta(x)\}$ sería no vacío. Pongamos $\gamma(x) = \max\{\eta(x),\omega(x)\}$. Entonces $\gamma \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$, $\gamma = \omega$ en $\partial\Omega$ y $\gamma \geq \omega$ en Ω. Luego, por ser ω un super-mínimo, tenemos $\mathcal{A}(\omega,\Omega) \leq \mathcal{A}(\gamma,\Omega)$. Igual que hicimos en la demostración de la proposición anterior, como $\gamma = \eta$ en Δ y $\gamma = \omega$ en el complemento de Δ, se deduce de la definición de $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ que

$$\mathcal{A}(\omega,\Delta) \leq \mathcal{A}(\eta,\Delta).$$

De manera análoga, si $\zeta(x) = \min\{\eta(x),\omega(x)\}$ tenemos $\zeta \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$, $\zeta = \eta$ en $\partial\Omega$ y $\zeta \leq \eta$ en Ω, de suerte que $\mathcal{A}(\eta,\Omega) \leq \mathcal{A}(\zeta,\Omega)$ por ser η super-mínimo; y, como $\zeta = \omega$ en Δ y $\zeta = \eta$ en el complemento de Δ, obtenemos la desigualdad contraria

$$\mathcal{A}(\omega,\Delta) \geq \mathcal{A}(\eta,\Delta),$$

y por lo tanto

$$\mathcal{A}(\omega,\Delta) = \mathcal{A}(\eta,\Delta).$$

Pero $\omega = \eta$ en $\partial\Delta$ mientras que $\omega < \eta$ en Δ, luego debe de ser $D\omega \neq D\eta$ en un subconjunto de Δ de medida positiva. Entonces, por la convexidad estricta de F, deducimos que

$$\mathcal{A}\Big(\frac{\eta+\omega}{2}, \Delta\Big) < \frac{1}{2}\mathcal{A}(\eta, \Delta) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(\omega, \Delta) = \mathcal{A}(\omega, \Delta),$$

donde es evidente que $\frac{1}{2}(\eta+\omega) \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$. Ahora bien, $\omega \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ es un super-mínimo, luego $\omega|_\Delta \in \mathrm{Lip}_k(\Delta)$ es también un super-mínimo. Pero $\frac{1}{2}(\eta+\omega) = \omega$ en $\partial\Delta$ y $\frac{1}{2}(\eta+\omega) \geq \omega$ en Δ, y por lo tanto

$$\mathcal{A}(\omega, \Delta) \leq \mathcal{A}\Big(\frac{\eta+\omega}{2}, \Delta\Big),$$

que contradice a la desigualdad anterior. □

Como consecuencia inmediata obtenemos lo siguiente:

COROLARIO. *Sean $\omega, \eta \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ respectivamente un super-mínimo y un sub-mínimo de $\mathcal{A}(\cdot, \Omega)$. Entonces*

$$\sup_\Omega(\eta - \omega) = \sup_{\partial\Omega}(\eta - \omega).$$

DEMOSTRACIÓN. Observamos que, para cada $c \in \mathbb{R}$, la función $\omega + c$ es un super-mínimo en $\mathrm{Lip}_k(\Omega)$. Además es claro que, para cada $x \in \partial\Omega$, se tiene

$$\eta(x) \leq \omega(x) + \sup_{\partial\Omega}(\eta - \omega).$$

Por el principio del máximo esta desigualdad se cumple en todo Ω, de modo que $\sup_\Omega(\eta-\omega) \leq \sup_{\partial\Omega}(\eta-\omega)$. Pero la desigualdad contraria es obvia. □

En particular, si $u, v \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ son mínimos de $\mathcal{A}_k(\cdot, \Omega)$ tenemos

$$\sup_\Omega |u - v| = \sup_{\partial\Omega} |u - v|,$$

y por lo tanto deducimos:

TEOREMA (Existencia y unicidad de mínimos). *El funcional $\mathcal{A}(\cdot, \Omega)$ admite un mínimo único en $\mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$ para cada $k > 0$ y cada $U \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$.*

Se deduce que, para $U \in \mathrm{Lip}(\Omega)$, los mínimos de $\mathcal{A}(\cdot, \Omega)$ en $\mathrm{Lip}(\Omega, U)$, si existen, también son únicos. Sin embargo, nos llevará más trabajo estudiar la existencia de estos mínimos globales.

2. Barreras

Nos planteamos el siguiente problema: queremos demostrar que algún minimizante de $\mathcal{A}_k(\cdot, \Omega)$ en $\mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$ minimiza en todo $\mathrm{Lip}(\Omega, U)$. Para ello nos basta ver que $[u]_{0,1} < k$. Para conseguir esta desigualdad tendremos que reducir primero el cálculo de la constante de Lipschitz a la frontera, y luego acotar la pendiente cerca de la frontera encajando a nuestro minimizante entre dos barreras. Primero, reduzcamos a la frontera:

Lema. *Sea $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ un mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$. Entonces*

$$[u]_{0,1} = \sup_{x\in\Omega,\, y\in\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}.$$

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in \Omega$ puntos distintos y sea $\tau = x_2 - x_1$. En $\Omega_\tau = \{x \in \mathbb{R}^N : x+\tau \in \Omega\}$ definimos $u_\tau(x) = u(x+\tau)$. Es claro que $u_\tau \in \mathrm{Lip}_k(\Omega_\tau)$ es un mínimo de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega_\tau)$ por serlo $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega)$. Observemos que $x_1 \in \Omega$ y $x_1 + \tau = x_2 \in \Omega$, de modo que la intersección $\Omega \cap \Omega_\tau$ contiene al punto x_1 y por lo tanto es no vacía. Las dos funciones $u, u_\tau \in \mathrm{Lip}_k(\Omega\cap\Omega_\tau)$ son mínimos de $\mathcal{A}_k(\cdot,\Omega\cap\Omega_\tau)$, y entonces sabemos que

$$\sup_{\Omega\cap\Omega_\tau} |u-u_\tau| = \sup_{\partial(\Omega\cap\Omega_\tau)} |u-u_\tau|.$$

Tomemos pues un punto $x_0 \in \partial(\Omega\cap\Omega_\tau)$ tal que

$$|u(x_1)-u(x_2)| = |u(x_1)-u_\tau(x_1)| \le |u(x_0)-u_\tau(x_0)| = |u(x_0)-u(x_0+\tau)|.$$

Como ora x_0 ya $x_0+\tau$ pertenece a $\partial\Omega$, vemos que

$$\frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|\tau|} \le \frac{|u(x_0)-u(x_0+\tau)|}{|\tau|} \le \sup_{x\in\Omega,\, y\in\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|};$$

y, como $x_1, x_2 \in \Omega$ eran arbitrarios, se deduce

$$[u]_{0,1} \le \sup_{x\in\Omega,\, y\in\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}.$$

La desigualdad contraria es obvia, y hemos terminado. □

Vayamos ahora a por las barreras. Consideremos para $x \in \Omega$ la función *distancia al borde,* $d(x) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$. Para cada $t > 0$ sean

$$\Sigma_t = \{x \in \Omega : d(x) < t\}, \qquad \Gamma_t = \{x \in \Omega : d(x) = t\}.$$

Definición. Una barrera superior para $U : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ relativa al funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ es un super-mínimo $B^+ \in \mathrm{Lip}(\Sigma_t)$ de $\mathcal{A}(\cdot,\Sigma_t)$ tal que

$$B^+ = U \quad \text{en } \partial\Omega, \qquad B^+ \ge \sup_{\partial\Omega} U \quad \text{en } \Gamma_t.$$

Una barrera inferior para $U : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ relativa al funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ es un sub-mínimo $B^- \in \mathrm{Lip}(\Sigma_t)$ de $\mathcal{A}(\cdot,\Sigma_t)$ tal que

$$B^- = U \quad \text{en } \partial\Omega, \qquad B^- \le \inf_{\partial\Omega} U \quad \text{en } \Gamma_t.$$

La importancia de estos objetos se pone de manifiesto en el siguiente teorema.

TEOREMA. *Supongamos que existe una barrera superior B^+ y una barrera inferior B^- para $U \in \mathrm{Lip}(\Omega)$. Entonces el funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ admite un mínimo en* $\mathrm{Lip}(\Omega, U)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $Q = \max\{[B^+]_{0,1}, [B^-]_{0,1}\}$, tomemos $k > Q$ y sea u el mínimo de $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ en $\mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$. Como las constantes son mínimos e

$$\inf_{\partial\Omega} U \leq u \leq \sup_{\partial\Omega} U$$

en $\partial\Omega$, la desigualdad se debe tener en todo Ω. En particular se tiene en Γ_t y, por lo tanto,

$$B^- \leq u \leq B^+$$

en Γ_t. Pero como en $\partial\Omega$ se tiene hasta igualdad, teniendo en cuenta que B^+ y B^- son respectivamente super-mínimo y sub-mínimo se deduce que esta última desigualdad es cierta en todo Σ_t. Luego

$$B^-(x) - B^-(y) \leq u(x) - u(y) \leq B^+(x) - B^+(y) \qquad \forall x \in \Sigma_t,\ \forall y \in \partial\Omega$$

y se deduce que

$$|u(x) - u(y)| \leq Q|x - y| \qquad \forall x \in \Sigma_t,\ \forall y \in \partial\Omega.$$

Sin embargo, si $x \in \Omega$ y $d(x) > t$, entonces

$$|u(x) - u(y)| \leq \max\Big\{ \sup_{\partial\Omega} U - u(y) : u(y) - \inf_{\partial\Omega} U \Big\} \leq Qt$$

y esto demuestra que $[u]_{0,1} \leq Q < k$, con lo cual u minimiza a $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ en todo $\mathrm{Lip}(\Omega, U)$. □

Discutamos pues la existencia de barreras. Nos podemos limitar al caso de barreras superiores, ya que si B^+ es una barrera superior para $-U$, entonces $-B^+$ es una barrera inferior para U. Sea ω un super-mínimo de clase C^2 en cualquier abierto Δ. Si $\varphi \geq 0$ tiene soporte compacto contenido en Δ, la función

$$g(t) = \mathcal{A}(\omega + t\varphi, \Delta), \qquad t \geq 0,$$

tiene un mínimo en $t = 0$ y por lo tanto $g'(0) \geq 0$. Esto se traduce en

$$\sum_{j=1}^{N} \int_\Delta \frac{\partial F}{\partial z_j}(D\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dm \geq 0,$$

que integrando por partes, y en vista de la arbitrariedad de φ, implica

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial F}{\partial z_j}(D\omega)\Big) \leq 0.$$

Si definimos

$$\mathcal{L}(\omega) = \sum_{i,j=1}^{N} A^{ij}_{D\omega}\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad A^{ij}_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(z),$$

la condición impuesta por la anterior desigualdad es exactamente $\mathcal{L}(\omega) \leq 0$.

Es fácil ver que el recíproco también es cierto, de modo que toda $\omega \in C^2(\Delta)$ que satisfaga esta inecuación será un super-mínimo de $\mathcal{A}(\cdot, \Delta)$.

Nuestro objetivo ahora es encontrar una solución de la desigualdad diferencial $\mathcal{L}(\omega) \leq 0$ definida en un entorno Σ_t de la frontera de Ω, que coincida con U en $\partial\Omega$ y que sea mayor que $\sup_{\partial\Omega} U$ en Γ_t.

3. Demostración del resultado de existencia

En esta sección construimos una barrera superior suponiendo que $\partial\Omega$ y U son de clase C^2, siendo la curvatura media de $\partial\Omega$ no positiva. Esto, gracias al trabajo que llevamos realizado, garantiza la existencia de un mínimo único en todo $\mathrm{Lip}(\Omega, U)$, demostrando el Teorema A. Supongamos que $\partial\Omega$ es de clase C^k.

Es bien sabido (ver por ejemplo [3]) que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico, $N_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon\}$ es un entorno tubular de $\partial\Omega$, es decir, una variedad de clase C^k con borde $\partial N_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = \varepsilon\}$ equipada con una proyección $\pi : N_\varepsilon \to \partial\Omega$, también de clase C^k, que le asigna a cada $x \in N_\varepsilon$ el único punto $\pi(x) \in \partial\Omega$ que está a distancia mínima de x. Además tenemos un difeomorfismo C^{k-1} de $\partial\Omega \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ en N_ε dado por $(y, t) \mapsto y + t\mathbf{n}(y)$, donde $\mathbf{n}(y)$ es la normal exterior sobre $\partial\Omega$. Ésta existe globalmente por ser $\partial\Omega$ una hipersuperficie compacta (de nuevo ver [4]). Es la elección natural de vector normal si orientamos a $\partial\Omega$ como borde de Ω. Por supuesto, $\pi(y + t\mathbf{n}(y)) = y$. Además es obvio que, bajo ese difeomorfismo, Σ_ε corresponde a $\partial\Omega \times (-\varepsilon, 0)$ y Γ_ε corresponde a $\partial\Omega \times \{-\varepsilon\}$. Podemos además tomar $\varepsilon > 0$ tan chico que $-1/\varepsilon$ sea una cota inferior para las curvaturas normales de $\partial\Omega$. Tenemos entonces:

Lema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera de clase C^k, $k \geq 2$. Entonces, si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente chico para que se tenga la situación descrita en el parrafo precedente, la distancia $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ es de clase C^k en Σ_ε y para cada $x \in \Sigma_\varepsilon$ se cumple*

$$\Delta d(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\kappa_j(\pi(x))}{1 + \kappa_j(\pi(x)) d(x)}$$

donde κ_j son las curvaturas principales de $\partial\Omega$.

Demostración. Dado $x_0 \in \Sigma_\varepsilon$, podemos suponer que $\pi(x_0) = 0$, que el espacio tangente $T_0\partial\Omega$ a $\partial\Omega$ en 0 es el hiperplano $x_N = 0$, y que en un entorno $V = W \times (-\delta, \delta)$ de 0 la frontera $\partial\Omega$ es la gráfica de una función $f : W \to \mathbb{R}$. Escribiremos $y = (w, f(w))$ para $y \in \partial\Omega$ y $w \in W$. Observemos que, entonces, $Df(0) = 0$. Supondremos además que $\Omega \cap V$ está debajo de la gráfica de f. Con una posible

rotación respecto al eje vertical podemos suponer que la matriz $D^2 f(0)$ es diagonal, de manera que

$$D^2 f(0) = \operatorname{diag}\Big(\kappa_1(0), \kappa_2(0), \dots, \kappa_{N-1}(0)\Big).$$

Como en V se tiene que $\partial\Omega$ es la gráfica de f, y ésta es C^k-difeomorfa a W, nuestro entorno tubular N_ε en V es C^{k-1}-difeomorfo a $W \times [\varepsilon, \varepsilon]$ mediante $\Phi(w,t) = \big(w, f(w)\big) + t\mathbf{n}\big(w, f(w)\big)$. La normal exterior está dada por la fórmula

$$\mathbf{n}\big(w, f(w)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+|Df(w)|^2}}\Big(- \frac{\partial f}{\partial w_1}(w), -\frac{\partial f}{\partial w_2}(w), \dots, -\frac{\partial f}{\partial w_{N-1}}(w), 1\Big)$$

y, por lo tanto,

$$D\Phi(0,t) = \operatorname{diag}\Big(1-\kappa_1(0)t, 1-\kappa_2(0)t, \dots, 1-\kappa_{N-1}(0)t, 1\Big).$$

Como $\pi(x)$ es el punto más cercano a x en $\partial\Omega$ y $x = \pi(x) + t\mathbf{n}(\pi(x))$ para cada $x \in \Sigma_\varepsilon$, vemos que $d(x) = -\mathbf{n}(\pi(x)) \cdot (x - \pi(x))$ para todo $x \in \Sigma_\varepsilon$. Luego

$$\frac{\partial d}{\partial x_j}(x) = -\frac{\partial(\mathbf{n}\circ\pi)}{\partial x_j}(x) \cdot (x - \pi(x)) + \mathbf{n}(\pi(x)) \cdot \frac{\partial \pi}{\partial x_j}(x) - \mathbf{n}^j(\pi(x)). \tag{1}$$

Ahora bien, es fácil ver que tanto $\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{n}\circ\pi(x)$ como $\frac{\partial}{\partial x_j}\pi(x)$ son tangentes a $\partial\Omega$ en $\pi(x)$. Por lo tanto, los dos primeros términos del lado derecho de la igualdad (1) se anulan, y concluimos que

$$Dd(x) = -\mathbf{n}(\pi(x)) \qquad \forall x \in \Sigma_\varepsilon.$$

Como la normal exterior es de clase C^{k-1} se deduce que d es de clase C^k. Por la regla de la cadena es $D^2 d(x) = -D\mathbf{n}(\pi(x))\, D\pi(x)$. Ahora bien,

$$D\mathbf{n}(0) = \operatorname{diag}\Big(- \kappa_1(0), -\kappa_2(0), \dots, -\kappa_{N-1}(0), 0\Big);$$

y, como $\pi(\Phi(w,t)) = (w, f(w))$, derivando vemos que

$$D\pi(x_0)\, D\Phi(0, -d(x_0)) = \operatorname{diag}\Big(1, 1, \dots, 1, 0\Big)$$

y, por lo tanto,

$$D\pi(x_0) = \operatorname{diag}\Big(\frac{1}{1+\kappa_1(0)d(x_0)}, \frac{1}{1+\kappa_2(0)d(x_0)}, \dots, \frac{1}{1+\kappa_{N-1}(0)d(x_0)}, 0\Big).$$

Pero, entonces,

$$\Delta d(x_0) = \operatorname{traza}\big(D^2 d(x_0)\big) = -\operatorname{traza}\big(D\mathbf{n}(0)\, D\pi(x_0)\big) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\kappa_j(\pi(x_0))}{1+\kappa_j(\pi(x_0))d(x_0)}$$

tal como queríamos comprobar. □

Nosotros sólo necesitaremos la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario. *Si H es la curvatura media de $\partial\Omega$, entonces*

$$\Delta d(x) \leq (N-1)H(\pi(x)) \qquad \forall x \in \Sigma_\varepsilon.$$

Demostración. Basta observar que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $b > 0$ y $1 + ab > 0$, se tiene $a/(1+ab) \leq a$, y esto es obvio ya que equivale a $a^2 b \geq 0$. □

Con este detalle técnico resuelto, podemos volver al estudio de nuestro funcional del área. Observemos que, con la notación de la sección anterior,

$$A_z^{ij} = (1+|z|^2)^{-3/2}\big(\delta_{ij}(1+|z|^2) - z_i z_j\big),$$

y por lo tanto α será autovalor de $(A_z^{ij})_{i,j=1}^N$ si y sólo si existe $v \in \mathbb{R}^N$ no nulo tal que

$$(1+|z|^2)^{-3/2}\Big((1+|z|^2)v_i - z_i\,(z\cdot v)\Big) = \alpha v_i.$$

Si z es ortogonal a v, entonces, como $v_i \neq 0$ para algún $i = 1, 2, \ldots, N$, deducimos que $\alpha = (1+|z|^2)^{-1/2}$. Sin embargo, si $z \cdot v \neq 0$, entonces multiplicando la anterior igualdad por z_i, y sumando en $1 \leq i \leq N$, obtenemos

$$(1+|z|^2)^{-3/2}(z\cdot v) = (1+|z|^2)^{3/2}\Big((1+|z|^2)(z\cdot v) - |z|^2(z\cdot v)\Big) = \alpha(z\cdot v),$$

y por lo tanto $\alpha = (1+|z|^2)^{-3/2}$. Por ser $(A_z^{ij})_{i,j=1}^N$ una matriz simétrica no diagonal concluimos que tiene exactamente estos dos autovalores:

$$\lambda_z = (1+|z|^2)^{-3/2}, \qquad \Lambda_z = (1+|z|^2)^{-1/2}.$$

De aquí en adelante usaremos la siguiente notación, muy extendida en el mundo de las Ecuaciones en Derivadas Parciales por su comodidad. La letra C representará una constante, pero variable, en el sentido que C puede cambiar de un paso a otro, «absorbiendo» nuevas constantes que surjan en los cálculos.

Sea ahora φ una función suave tal que

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi' > 0, \qquad \varphi'' < 0.$$

Supongamos que $U \in C^2(\partial\Omega)$, de modo que por definición U es de clase C^2 en un entorno de $\partial\Omega$, que por compacidad contendrá a Σ_t para $t > 0$ chico. Supongamos también que $\partial\Omega$ es al menos de clase C^2. Entonces, para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico, $d \in C^2(\Sigma_\varepsilon)$. Vamos a intentar encontrar barreras de la forma

$$\omega(x) = U(x) + \varphi(d(x)).$$

En este caso resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\omega) &= \sum_{i,j=1}^N A_{D\omega}^{ij}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^N A_{D\omega}^{ij}\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi'(d)\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j}\Big) + \varphi''(d) A_{D\omega}^{ij}\frac{\partial d}{\partial x_i}\frac{\partial d}{x_j}.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{N} A^{ij}_{D\omega}\,\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} \le C\,(1+|D\omega|)\,\lambda_{D\omega}.$$

Como $|Dd|=1$ en todo Σ_ε (ya que $Dd(x)=-\mathbf{n}(\pi(x))$, es claro que

$$\sum_{i,j=1}^{N} A^{ij}_{D\omega}\frac{\partial d}{\partial x_i}\frac{\partial d}{x_j} \ge \lambda_{D\omega}$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{L}(\omega) \le C\Lambda_{D\omega} + \lambda_{D\omega}\Big(C\,(1+|D\omega|)\,\varphi'(d)+\varphi''(d)\Big).$$

Pero $D\omega = DU + \varphi'(d)Dd$ implica que

$$|D\omega| \le |DU| + \varphi'(d)|Dd| \le C + \varphi'(d),$$

con lo cual

$$\mathcal{L}(\omega) \le \lambda_{D\omega}\Big(C\frac{\Lambda_{D\omega}}{\lambda_{D\omega}} + C\big(1+\varphi'(d)\big)\varphi'(d)+\varphi''(d)\Big).$$

Supongamos además que $\varphi' \ge 1$. Entonces

$$\frac{\Lambda_{D\omega}}{\lambda_{D\omega}} = (1+|D\omega|^2) \le C(\varphi'(d))^2$$

y obtenemos, en definitiva,

$$\mathcal{L}(\omega) \le \lambda_{D\omega}\Big(C(\varphi'(d))^2+\varphi''(d)\Big).$$

Ahora bien, si fijamos la constante C que aparece en la última desigualdad y para $\sigma>0$ tomamos

$$\varphi(t) = \frac{1}{C}\log(1+\sigma t),$$

es claro que $\varphi(0)=0$, $\varphi'>0$ y $\varphi''<0$, y se comprueba fácilmente que $C(\varphi'(d))^2+\varphi''(d)=0$, de modo que para que la función asociada $\omega = U+\varphi(d)$ sea una barrera sólo tenemos que comprobar que, escogiendo σ adecuadamente, para $\varepsilon>0$ suficientemente chico se tendrá

$$\varphi'(t)\ge 1, \quad \forall t\in[0,\varepsilon] \qquad \text{y} \qquad \varphi(\varepsilon) \ge \sup_{\Gamma_\varepsilon} U - \inf_{\Gamma_\varepsilon} U.$$

Esto es decir que

$$\frac{\sigma}{1+\sigma\varepsilon} \ge C \qquad \text{y} \qquad \log(1+\sigma\varepsilon) \ge C\Big(\sup_{\Gamma_\varepsilon} U - \inf_{\Gamma_\varepsilon} U\Big),$$

lo cual se cumple sin problemas tomando $\sigma = 1/\varepsilon^2$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico. Esto nos da nuestra barrera y, por lo tanto, nos garantiza la existencia de mínimos para el funcional del área. Nos queda sin embargo examinar la condición impuesta

$$\sum_{i,j=1}^{N} A^{ij}_{D\omega} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} \leq C\,(1 + |D\omega|)\,\lambda_{D\omega}.$$

Como tenemos

$$\sum_{i,j=1}^{N} A^{ij}_{D\omega} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda_{D\omega}\Big((1 + |D\omega|^2)\Delta d - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j}\Big)$$

y

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi'(d) \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial d}{\partial x_i}\frac{\partial d}{\partial x_j}\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j},$$

donde el último término se anula puesto que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial d}{\partial x_i}\frac{\partial d}{\partial x_j}\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial d}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial d}{\partial x_j}\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial d}{\partial x_i}\frac{\partial |Dd|^2}{\partial x_i} = 0,$$

obtenemos

$$\sum_{i,j=1}^{N} A^{ij}_{D\omega} \frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda_{D\omega}\Big((1 + |D\omega|^2)\Delta d - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j}\Big).$$

Pero como $d, U \in C^2(\Sigma_\varepsilon)$, podemos tomar $K > 0$ tal que

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial^2 d}{\partial x_i \partial x_j}\Big| \leq K \qquad \text{en} \quad \Sigma_\varepsilon,$$

de modo que la condición se cumplirá si para $C > 0$ grande se tiene

$$(1 + |D\omega|^2)\Delta d + K \leq C(1 + |D\omega|).$$

Esta desigualdad es sutil, ya que ω misma depende de C, a través de φ. Sin embargo, si suponemos que $\Delta d \leq 0$, cosa que ocurrirá siempre que $\partial\Omega$ tenga curvatura media no positiva, vemos que la desigualdad resulta obvia tomando cualquier C que sea mayor o igual que K. En efecto:

$$(1 + |D\omega|^2)\Delta d + K \leq K \leq C \leq C(1 + |D\omega|).$$

Esto concluye la demostración del resultado de existencia.

4. Demostración del resultado de no existencia

Como contrapunto al resultado de existencia de la sección anterior, demostraremos ahora el Teorema B. Para ello necesitaremos una segunda versión del principio del máximo. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con $\partial\Omega = \partial^0\Omega \cup \partial^1\Omega$, donde $\partial^1\Omega = A \cap \partial\Omega$ para algún abierto $A \subset \mathbb{R}^N$ (es decir, $\partial^1\Omega$ es relativamente abierto en $\partial\Omega$). Entonces se tiene:

Principio del máximo II. *Si $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ y $v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ son respectivamente un mínimo y un super-mínimo de $\mathcal{A}(\cdot, \Omega)$ tales que*

$$u \le v \quad \text{en } \partial^0\Omega, \qquad \liminf_{t\to 0^+} \inf_{A\cap\Gamma_t} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} > [u]_{0,1},$$

entonces $u \le v$ en todo Ω

Recordamos, antes de presentar la demostración, que del cálculo con el que empezamos la sección anterior se deduce que, para $t > 0$ suficientemente chico, $\Gamma_t = d^{-1}(t)$ es una variedad de clase C^2 con vector normal $\mathbf{n}(x) = -Dd(x) = \mathbf{n}(\pi(x))$, de modo que el enunciado tiene sentido.

Demostración. Supongamos primero que $u < v$ en $\partial^0\Omega$. Por continuidad es claro que existe un $t_0 > 0$ tal que, para todo $t < t_0$, se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} > [u]_{0,1} \quad \text{en } \Gamma_t \cap A, \qquad u \le v \quad \text{en } \Gamma_t - A.$$

Si fuese $u > v$ en algún punto $x_0 \in \Omega$, tomemos $t < t_0$ tal que $x_0 \in \Omega_t$, donde $\Omega_t = \Omega - \overline{\Sigma}_t$. Como

$$\sup_{\Omega_t}(u - v) = \sup_{\partial\Omega_t}(u - v),$$

la función $\omega = u - v$ toma su máximo en algún punto $x_1 \in \partial\Omega_t = \Gamma_t$. Debe de ser entonces $u(x_1) > v(x_1)$, pero $u \le v$ en $\Gamma_t \cap A$, y por lo tanto $x_1 \in \Gamma_t - A$. Ahora bien, si $\nu = \mathbf{n}(x_1)$, tenemos

$$\frac{\omega(x_1 - h\nu) - \omega(x_1)}{h} = -\frac{u(x_1 - h\nu) - u(x_1)}{-h} + \frac{v(x_1 - h\nu) - v(x_1)}{-h},$$

de modo que

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{\omega(x_1 - h\nu) - \omega(x_1)}{h} \ge -[u]_{0,1} + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(x_1) > 0.$$

Esto contradice nuestra elección de x_1 pues, si ω alcanza su máximo en este punto, el lado izquierdo no puede ser positivo. El resultado está ya demostrado si $u < v$ en $\partial^0\Omega$. Para deducir el caso general basta considerar $v + \varepsilon$ en vez de v para $\varepsilon > 0$ y hacer tender $\varepsilon \to 0$. □

Armados con esta herramienta podemos pasar directamente a la demostración del Teorema B. Supongamos pues que u minimiza el funcional $\mathcal{A}(\cdot,\Omega)$ en $\mathrm{Lip}(\Omega,U)$, donde $U \in C^2(\overline{\Omega})$ y $\partial\Omega$ es de clase C^2. Si $x_0 \in \partial\Omega$ cumple $H(x_0) > 0$, vamos a estimar u en $\Omega - \overline{B_R(x_0)}$, con $R > 0$. Consideramos la función $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, B_R(x_0))$. Observamos:

$$\delta(x) = |x - x_0| - R \quad \forall x \in \Omega - \overline{B_R(x_0)},$$
$$|D\delta| = 1, \qquad \Delta\delta(x) = \frac{N-1}{|x-x_0|}.$$

Para $A > 0$ y una función ψ, definamos

$$\omega(x) = A + \psi(\delta(x)) \qquad \forall x \in \Omega;$$

se tiene $D\omega = \psi'(\delta)D\delta$ y, por lo tanto,

$$\lambda_{D\omega} = (1+\psi'(\delta))^{-3/2}, \qquad A^{ij}_{D\omega} = \lambda_{D\omega}\Big(\delta_{ij}(1+\psi'(\delta)^2) - \psi'(\delta)^2 \frac{\partial\delta}{\partial x_i}\frac{\partial\delta}{\partial x_j}\Big).$$

Entonces, como $|D\delta| = 1$ implica

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2\delta}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial\delta}{\partial x_j} = 0,$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\omega) &= \sum_{i,j=1}^{N} A^{ij}_{D\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\partial x_j} \\
&= \psi'(\delta)\sum_{i,j=1}^{N} A^{ij}_{D\omega}\,\frac{\partial^2\delta}{\partial x_i\partial x_j} + \psi''(\delta)\sum_{i,j=1}^{N} A^{ij}_{D\omega}\,\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\frac{\partial\delta}{x_j} \\
&\le \lambda_{D\omega}\Big(\psi'(d)(1+\psi'(d)^2)\Delta\delta + \psi''(\delta)\Big).
\end{aligned}$$

Luego, tomando $\psi(t) = -B\sqrt{t}$, tenemos

$$\mathcal{L}(\omega) \le \lambda_{D\omega}\Big(\psi'(\delta)^3\Delta\delta + \psi''(\delta)\Big) \le \frac{\lambda_{D\omega}B}{4\delta^{3/2}}\Big(\frac{1-N}{2\,\mathrm{diam}(\Omega)}B^2 + 1\Big)$$

ya que

$$\Delta\delta(x) = \frac{N-1}{|x-x_0|} \ge \frac{N-1}{\mathrm{diam}(\Omega)}.$$

Tomando ahora $B = \sqrt{2\,\mathrm{diam}(\Omega)/(N-1)}$ obtenemos $\mathcal{L}(\omega) \le 0$ y, por lo tanto, ω es un super-mínimo de $\mathcal{A}(\cdot, \Omega - \overline{B_R(x_0)})$. Ahora bien, es claro que

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = +\infty \qquad \text{en } \partial B_R(x_0)$$

y, en consecuencia, si tomamos

$$A = \sup_{\partial\Omega - \overline{B_R(x_0)}} U + B\sqrt{\operatorname{diam}(\Omega)}$$

estamos en las hipótesis del segundo principio del máximo. Concluimos por lo tanto que $u \leq \omega$ en todo $\Omega - \overline{B_R(x_0)}$. Esto implica la desigualdad

$$\sup_{\Omega - \overline{B_R(x_0)}} u \leq \sup_{\partial\Omega - \overline{B_R(x_0)}} U + B\sqrt{\operatorname{diam}(\Omega)}$$

y, en particular,

$$\sup_{\partial B_R(x_0)\cap\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega - \overline{B_R(x_0)}} U + B\sqrt{\operatorname{diam}(\Omega)}.$$

Por otra parte, como $H(x_0) > 0$ y $\Delta d(x) \to H(x_0)$ cuando $x \to x_0$ (esto es una consecuencia inmediata de nuestra fórmula para Δd), podemos escoger $R > 0$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente chicos para que se tenga

$$\Delta d(x) \geq \varepsilon \qquad \forall x \in B_R(x_0) \cap \Omega.$$

Usaremos esto para estimar u en $B_R(x_0) \cap \Omega$. Tomamos ahora $\phi(t) = \alpha - \beta\sqrt{t}$ y ponemos $v = \phi(d)$. Se obtiene, exactamente igual que antes,

$$\mathcal{L}(v) \leq \lambda_{Dv}\Big(\phi'(d)^3\Delta d + \phi''(d)\Big);$$

por lo tanto, si $\beta > \sqrt{2/\varepsilon}$ es

$$\mathcal{L}(v) \leq \frac{\lambda_{Dv}\beta}{4d^{3/2}}\Big(1 - \frac{\varepsilon\beta^2}{2}\Big) < 0,$$

con lo cual v es un super-mínimo de $\mathcal{A}(\cdot, \Omega \cap B_R(x_0))$. Volvemos a ver que

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = +\infty \qquad \text{en } \partial\Omega \cap B_R(x_0).$$

Entonces, si tomamos

$$\alpha = \sup_{\partial B_R(x_0)\cap\Omega} u + \beta\sqrt{\operatorname{diam}(\Omega)},$$

podemos volver a aplicar el segundo principio del máximo y concluir que $u \leq v$ en Ω, de suerte que

$$\sup_{\Omega\cap B_R(x_0)} u \leq \sup_{\partial B_R(x_0)\cap\Omega} u + \beta\sqrt{\operatorname{diam}(\Omega)} \leq \sup_{\partial\Omega - \overline{B_R(x_0)}} U + (\beta + B)\sqrt{\operatorname{diam}(\Omega)}$$

y, en particular,

$$\sup_{\partial\Omega\cap B_R(x_0)} U \leq \sup_{\partial\Omega - \overline{B_R(x_0)}} U + (\beta + B)\sqrt{\operatorname{diam}(\Omega)}.$$

Pero en esta desigualdad no interviene u en absoluto, es una condición necesaria sobre el dato U para que exista un mínimo de $\mathcal{A}(\cdot, U)$. Basta ahora tomar un dato U que no satisfaga esa igualdad, por ejemplo cualquier $U \in C^2(\partial\Omega)$ tal que

$$U = 0 \quad \text{en } \partial\Omega - B_R(x_0), \qquad U(x_0) > (\beta + B)\sqrt{\operatorname{diam}(\Omega)},$$

y hemos demostrado que el funcional del área no puede tener mínimo en $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$.

5. Conclusión y agradecimientos

Quedan pues demostrados los dos resultados que nos propusimos comprender en este trabajo. Esperamos que el lector haya disfrutado esta muestra de algunas de las ideas y técnicas presentes en el cálculo de variaciones, sobre todo en cuanto sus aplicaciones a problemas geométricos. El siguiente paso natural pasa por la lectura de [1], donde por ejemplo se puede encontrar una deliciosa discusión del problema de Bernstein, entre muchas otras cosas.

No sería oportuno despedirse sin darle las gracias al profesor Ireneo Peral, del que el autor ha aprendido lo poco que sabe sobre EDPs, además de haber supervisado este trabajo en el curso académico 2011–2012.

Referencias

[1] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhhäuser, 1984.

[2] E. Giusti, *Metodi Diretti Nel Calcolo delle Variazioni*, Unione Matematica Italiana, 1994.

[3] V. Guillemin y A. Pollack, *Differential Topology*, AMS Chelsea Publishing, 1974.

[4] H. Jenkins y J. Serrin, The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions, *J. Reine Angew. Math.* **229** (1968), 170–187.

[5] J.C.C. Nitsche, *Lectures on Minimal Surfaces*, Cambridge University Press, 1989.

[6] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Courier Dover Publications, 2002.

Daniel Álvarez Gavela, Mathematics Department, Stanford University, California 94305, EE. UU.
Correo electrónico: dgavela@stanford.edu