

El problema de Cayley y el método de Chebyshev

En 1879 el matemático británico Arthur Cayley planteó, en un artículo de una página (¡un antepasado de las miniaturas matemáticas!) titulado *The Newton-Fourier imaginary problem*, la extensión del conocido método de Newton al plano complejo. En concreto, dada una ecuación definida en el plano complejo $f(z) = 0$, con raíces $A, B, C, \dots$, el método de Newton consiste en generar una sucesión de valores

$$\xi_{k+1} = N_f(\xi_k) := \xi_k - \frac{f(\xi_k)}{f'(\xi_k)}, \quad k \geq 0,$$

siendo ξ_0 un punto de partida arbitrario. Cayley intentaba dividir el plano complejo en regiones de manera que, empezando en un punto ξ_0 cualquiera en una de estas regiones, el método de Newton converge a la raíz A , empezando en otra de las regiones se llega a la raíz B , y así sucesivamente (tales regiones se denominan *cuenas de atracción* de las raíces).

Cayley admitió su fracaso en el caso general (hoy sabemos que, ya para polinomios cúbicos, aparecen objetos fractales), pero vio que esto no era complicado para polinomios cuadráticos $f(z) = (z - A)(z - B)$. Mediante un proceso conocido como *conjugación*, que consiste en componer la función de iteración con la transformada de Möbius $M(z) = (z - A)/(z - B)$, que da $R(z) = M \circ N_f \circ M^{-1}(z) = z^2$, se prueba que el método de Newton converge a la raíz más cercana al punto de partida (el lector puede, sin duda, completar los detalles); cuando el punto de partida está en la mediatriz del segmento que une las dos raíces, el comportamiento es caótico.

Para polinomios cuadráticos, parece muy natural que las dos cuencas de atracción sean como acabamos de describir. Pero no es lo que ocurre con otros métodos iterativos para resolver ecuaciones, como con el método de Chebyshev

$$\xi_{k+1} = C_f(\xi_k) := \xi_k - \left(1 + \frac{f(\xi_k)f''(\xi_k)}{2f'(\xi_k)^2}\right) \frac{f(\xi_k)}{f'(\xi_k)}, \quad k \geq 0.$$

La composición $M \circ C_f \circ M^{-1}(z)$ es una función (racional) mucho más complicada que la z^2 del método de Newton, y ya no se pueden seguir los argumentos de Cayley.

Veamos esto de manera gráfica, con el polinomio $f(z) = z^2 + 1$ (que no tiene nada de particular). La figura de la izquierda muestra, en dos colores, las cuencas de atracción de las dos raíces i y $-i$ al aplicar el método de Newton; la de la derecha, lo mismo con el de Chebyshev.

