

## Geometría simpléctica: aplicaciones y retos

por

Álvaro Pelayo

*Dedicado a mis padres, con admiración.*

**RESUMEN.** La geometría simpléctica es una rama fundamental de la matemática moderna que se origina en el estudio de los movimientos planetarios. Es una materia que tiene, además, numerosas aplicaciones. En este artículo intento transmitir en qué consiste la geometría simpléctica, enfatizando las aplicaciones a los llamados sistemas dinámicos, que son esencialmente colecciones de objetos o variables que evolucionan con el tiempo. Entre estas aplicaciones está el diseño de misiones espaciales. Además, en la última parte del artículo me concentro en aplicaciones a los sistemas dinámicos integrables, que son esenciales en la física clásica y cuántica. El artículo está escrito para llegar a un público general, no necesariamente de matemáticos o científicos.

### 1. INTRODUCCIÓN

La geometría simpléctica es una rama fundamental de las matemáticas, que está conectada con otras partes de las matemáticas como son la geometría algebraica y los sistemas dinámicos. Es una materia que está relacionada con la física y las otras ciencias, y que ha encontrado aplicaciones en el mundo real, como puede ser el diseño de misiones espaciales. En el artículo doy unas pinceladas sobre la geometría simpléctica y algunas aplicaciones, enfatizando aplicaciones a los sistemas dinámicos clásicos o cuánticos, sobre todo a los que son integrables.

Mientras que hay algunos artículos divulgativos para matemáticos sobre geometría simpléctica, no es tan fácil encontrar explicaciones sobre la misma para un público general. Al escribir este artículo he intentado llegar a un público amplio sin trivializar las ideas. Aún así, me tomo la libertad de hacer ciertas analogías, pues si quisiese ser preciso tendría que empezar este artículo con el concepto de forma diferencial, que es avanzado. Incluyo al final un apéndice que explica de modo un poco más preciso los conceptos del artículo. Aquellos que no estén interesados en el formalismo matemático pueden ignorar el apéndice sin perjuicio de comprender el artículo.

Cuando estaba retocando este artículo, un compañero me dijo que era escéptico con la divulgación matemática porque había leído bastantes artículos y siempre *se había quedado como estaba*. Le pregunté por el artículo<sup>1</sup> que escribí para la Fundación

---

<sup>1</sup><https://www.fbbva.es/noticias/que-es-la-geometria-simplectica>.

BBVA, y que le había hecho llegar. Me pareció entender que mi artículo había sido una excepción. Seguidamente me hizo una pregunta sobre el **teorema de no estrujamiento de Gromov** (que comentaré más tarde). El hecho de que le surgiese una pregunta ya es indicio de que algo aprendió. Además, me comentó que el tema de las aplicaciones de la geometría simpléctica a las misiones espaciales (que, de nuevo, comentaré más tarde) también le había interesado.

Este artículo está pensado para dar una idea de un área de las matemáticas y que a los lectores les surjan preguntas. Pero si los expertos estudian durante años estos temas, no es posible ni comunicarlos ni absorberlos más allá de una panorámica general en un artículo como este. Por ello, si los lectores sacan dos o tres ideas del mismo, ya es un éxito. Entre las más importantes están:

- ¿de dónde viene históricamente la geometría simpléctica?,
- ¿qué significa la peculiar palabra simpléctica?,
- ¿a qué se dedican los geómetras simplécticos *grosso modo*?, y
- ¿a qué se aplica la geometría simpléctica?

Para los lectores que quieran profundizar en estos temas recomiendo los artículos [26, 36, 38] o los libros [4, 18, 22] y las referencias que se incluyen en dichos trabajos.

Por último, mi motivación para escribir este artículo precisamente ahora se origina en la concesión en 2024 a Yakov Eliashberg, de la Universidad de Stanford, del último Premio Fronteras del Conocimiento de la Fundación BBVA, por sus contribuciones a la geometría simpléctica y áreas cercanas.

## 2. LA PALABRA «SIMPLÉCTICA»

La palabra *simpléctica* es cada vez más conocida entre los matemáticos, pero a día de hoy no es tan famosa como a algunos nos gustaría. Sin embargo, la situación está cambiando con celeridad a medida que más y más especialistas en dicha materia están ganando importantes premios, recibiendo importantes distinciones o ingresando en academias nacionales e internacionales.

Por ejemplo, geómetras simplécticos como son Yakov Eliashberg, Victor Guillemin, Helmut Hofer, Dusa McDuff y Peter Ozsvath son miembros de la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos, una distinción de extraordinaria importancia. Otros matemáticos con intereses conectados con la geometría simpléctica como son Mikhael Gromov, Tomasz Mrowka, Karen Uhlenbeck, Shlomo Sternberg y Clifford Taubes son también miembros de dicha academia.

En España, Manuel de León, Pedro Luis García Pérez y yo mismo, todos con líneas investigadoras relacionadas con la geometría simpléctica, somos miembros de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España. Además, instituciones como la Fundación BBVA han concedido premios y apoyado proyectos en geometría simpléctica en los últimos años, dando visibilidad a la materia en España.

Muchos físicos han escuchado la palabra *simpléctica* antes que los matemáticos, porque da nombre a un tipo de geometría que es fundamental para la física. Si ni

siquiera es una palabra tan conocida en matemáticas, no es sorprendente que no esté recogida en el diccionario de la Real Academia Española. Pienso que en vista de todo lo que está ocurriendo pronto la veremos incluida. Es, además, una palabra con una estructura curiosa, y no hay otra palabra similar en español.

Hace unos días la prensa española nos sorprendía con titulares en los que esta peculiar palabra aparecía mencionada en conexión con el prestigioso galardón **Premio Fronteras del Conocimiento**, que en su XVI edición ha recaído en Yakov Eliashberg y Claire Voisin, dos figuras que han hecho, respectivamente, contribuciones fundamentales a la geometría simpléctica y a la geometría algebraica.

El origen de la palabra *simpléctica* se remonta a 1939. Fue introducida en un libro [39] por el matemático Hermann Weyl, que fue catedrático del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (EE. UU). La palabra, que es de origen griego, significa *compleja*. Para los matemáticos esto sugiere un significado concreto, relacionado con los *números complejos*. Estos números resuelven ecuaciones que no se pueden resolver normalmente, como por ejemplo, ¿qué número  $x$  elevado al cuadrado da  $-1$ ? La solución es  $\sqrt{-1}$ , es decir, la raíz cuadrada de  $-1$ , que es un número complejo. Para un público general esta palabra sugiere algo difícil o complicado, pero ninguna de estas acepciones era lo que Weyl tenía en mente. Originalmente Hermann Weyl usaba la acepción *complejo/compleja* para referirse a transformaciones que preservaban las estructuras de la geometría simpléctica, pero ello estaba en colisión con la acepción usual relacionada con los números complejos, por lo que Weyl propuso el adjetivo *simpléctica* para bautizar esta geometría.

### 3. MUY RÁPIDO RECORRIDO HISTÓRICO DE LA GEOMETRÍA: DESDE EUCLIDES Y ARQUÍMEDES HASTA HOY

Para empezar el relato del artículo, quiero comentar la primera palabra del título: *geometría*. La geometría es un campo de las matemáticas que estudia las formas y sus propiedades, y que se remonta a tiempos antíguisimos. En general, la geometría tiene una ventaja sobre otras partes de las matemáticas, y es que se ve, se puede dibujar, se puede ilustrar, y en este sentido es intuitiva.

#### 3.1. LA GEOMETRÍA EN EL PASADO

La geometría se estudia en nuestros colegios desde edad temprana. Por ejemplo, casi todos los estudiantes de la ESO ya conocen el llamado **teorema de Pitágoras**. Pitágoras fue un filósofo, erudito y matemático que vivió en Grecia alrededor del año 500 antes de Cristo. A Pitágoras, y a la escuela que formó y que lleva su nombre, se les atribuye dicho teorema.

El teorema se refiere a triángulos rectángulos, es decir, triángulos que tienen un ángulo recto. Todo triángulo rectángulo tiene dos catetos y una hipotenusa, que es el lado más largo de los tres. El enunciado de este famosísimo resultado nos dice que en un triángulo rectángulo la longitud de su hipotenusa elevada al cuadrado es igual a la suma de las longitudes de los catetos elevadas al cuadrado.

Es probable que otras culturas previas también tuviesen conocimiento de esta fórmula, y a la escuela de Pitágoras se le atribuye su demostración matemática, es decir, la comprobación teórica de la fórmula.

Además de Pitágoras, una de la figuras realmente importantes de la geometría fue Euclides, otro de los sabios de la antigua Grecia que vivió alrededor del año 300 antes de Cristo. De hecho, Euclides es considerado el padre de la geometría.

El propio Euclides, en sus trabajos, está fuertemente influido por ideas y resultados de otros sabios griegos que le precedieron. Euclides recoge en su magistral obra todas estas contribuciones previas de modo sistemático y recopilatorio.

Como matemático me impresiona la madurez intelectual matemática que ya existía en la antigua Grecia. En los trabajos de Euclides se encuentran ya conceptos modernos como el rigor y la axiomatización. La obra más famosa de Euclides es *Los Elementos*, que esencialmente es un tratamiento sistemático y riguroso del conocimiento sobre la geometría que se tenía hasta entonces. *Los Elementos* consta de trece volúmenes. A día de hoy, la rama más conocida de la geometría, que se ocupa del espacio tridimensional en que vivimos, se denomina **geometría euclidiana** en honor del influente sabio.

La geometría euclidiana parte de unos postulados o axiomas (que se dan por ciertos), y a partir de ellos demuestra fórmulas y teoremas de un modo lógico y sistemático que es un gran precursor del rigor y la demostración en matemáticas, tal y como los entienden los matemáticos actuales.

Por citar un ejemplo, uno de los postulados de Euclides dice que desde cualquier punto a cualquier otro punto se puede trazar una línea recta. Básicamente, los postulados de Euclides resultan obvios. La clave está en que para demostrar fórmulas o teoremas, uno solo puede usar los postulados y fórmulas o teoremas previos (probados también a partir de los postulados, claro).

Además de Pitágoras y Euclides, es imposible no mencionar a **Arquímedes de Siracusa**, que vivió alrededor del año 250 antes de Cristo, y es considerado uno de los más grandes matemáticos/científicos/ingenieros de la historia. De esa época es también el gran geómetra Apolonio de Perga. Para hacer justicia a las contribuciones de estas figuras históricas se necesitaría mucho más que este breve artículo.

Es notable que el rastro histórico de la geometría en nuestra cultura está presente por todas partes, por ejemplo, en las fachadas de muchos de los edificios históricos de nuestras ciudades, que aparte de ofrecernos una portentosa belleza artística, tienen una estructura que es fruto de precisos cálculos matemáticos.

El centro de muchas ciudades españolas es un espectáculo geométrico: es un deleite observar los trazados y formas del edificio del ayuntamiento de Madrid o el Palacio Real, la catedral de León y las muchas otras catedrales de nuestro territorio, el acueducto de Segovia, la Giralda de Sevilla, la basílica de la Sagrada Familia en Barcelona, la Alhambra de Granada, por nombrar unas pocas de las obras de belleza geométrica indiscutible. La construcción de las mismas es el resultado de meticulosos cálculos matemáticos y geométricos, que requieren un avanzado conocimiento de las matemáticas, y en particular de los conceptos y fórmulas que aparecen en la geometría euclidiana. Además, la Alhambra de Granada contiene una notable riqueza geométrica-algebraica, estudiada por José María Montesinos [23, 24], experto

en topología tridimensional, y cuyos trabajos en los años 1970 recibieron notable atención internacional. Entre sus estudiantes están Antonio Costa y José Manuel R. Sanjurjo, que han continuado cultivando la topología.

### 3.2. LA GEOMETRÍA A DÍA DE HOY

Desde Euclides hasta nuestros días, la geometría ha evolucionado de modo espectacular. Son tantos los resultados que sería imposible mencionarlos superficialmente aquí. Por ello voy a dar un salto hasta la actualidad, enfocándome en la temática simpléctica. También voy a mencionar a un geómetra español, **Luis Santaló**.

#### 3.2.1. ESCUELAS INTERNACIONALES: IAS PRINCETON, BERKELEY, PARÍS, ETC.

A día de hoy la geometría es considerada una de las áreas más importantes de las matemáticas, y tiene una notable presencia en las grandes escuelas matemáticas del mundo, como pueden ser el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton o las universidades de Stanford, Harvard, California Berkeley, París u Oxford.

Como este es un artículo sobre geometría simpléctica, me permito resaltar algunos centros donde esta materia tiene una potente representación. Por ejemplo, en el Instituto de Estudios Avanzados trabaja **Helmut Hofer**, uno de los grandes propulsores de las aplicaciones de la geometría simpléctica a los sistemas dinámicos. Tuve la suerte de ser miembro del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton durante tres años (2010-2013), y de tener el despacho contiguo al de Helmut Hofer, con quien compartí momentos de inspiración científica.

En Stanford da clases el último galardonado con el Premio Fronteras del Conocimiento de la Fundación BBVA, **Yakov Eliashberg**. Durante el tiempo en el que fui profesor en la Universidad de California Berkeley tuve también la suerte de conversar en muchas ocasiones con otra de las figuras centrales de la geometría simpléctica del siglo XX, **Alan Weinstein**.

De hecho, cada dos meses Alan y yo íbamos a Palo Alto (ciudad donde se encuentra la Universidad de Stanford) a participar en el famoso *Northern California Symplectic Geometry Seminar*, en el que estaba involucrado Yakov Eliashberg. El seminario se celebraba mensualmente, alternativamente en las universidades de California Berkeley y Stanford. Después del seminario era costumbre salir a cenar. Fue un gusto compartir sobremesas con Yakov Eliashberg y Alan Weinstein, donde se hablaba de los últimos avances en geometría simpléctica, geometría de contacto y las conexiones de estas materias con la topología, el análisis, la física, etc.

Alan Weinstein se jubiló de Berkeley mientras yo era profesor allí. Por ese motivo Yakov Eliashberg, Steve Zelditch, Maciej Zworski y yo mismo decidimos organizar un congreso en su honor en el Instituto de Investigación MSRI de Berkeley. El congreso fue un éxito, y en la lista de conferenciantes se pueden encontrar matemáticos y matemáticas de diversas áreas relacionadas con la geometría simpléctica, lo cual es otro indicador de las conexiones existentes entre la misma y otras áreas.

### 3.2.2. LA COMPLUTENSE, SALAMANCA Y LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

En España, me gustaría destacar, en conexión con la geometría, un ejemplo que me toca de cerca porque fue donde me formé como estudiante de grado y es el sitio al que he vuelto después de casi dos décadas (2002-2020) en Estados Unidos: la Universidad Complutense de Madrid. Es una universidad que data del siglo XV y que evolucionó de la Universidad de Alcalá y después de la antigua Universidad Central. La Universidad Complutense ha tenido una larga tradición en geometría, que incluye por ejemplo al eminente geómetra gerundense Luis Santaló (1911-2001), que fue brevemente profesor de la misma.

Santaló es una figura internacionalmente reconocida por sus trabajos en diferentes problemas y teorías de la geometría, sobre todo en *geometría integral*, en la que fue pionero. Santaló, aunque pasó la mayor parte de su vida profesional en Argentina, mantuvo lazos con España; de hecho, en España su figura ha sido muy valorada. Por ejemplo, la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense organiza anualmente una conferencia distinguida, la **Conferencia Santaló**.

Además, la Real Sociedad Matemática Española organiza anualmente también la **Escuela Santaló**, en el Palacio de la Magdalena de la Universidad Internacional Menéndez Pelayo UIMP en Santander. Este es uno de los eventos destacados en la programación de la UIMP, e incluso su rector, el matemático Carlos Andradás, participa en la inauguración y promoción de la escuela.

Santaló fue además académico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España, conocida como la RAC. La RAC ha jugado un papel notable en el desarrollo y divulgación de la geometría en España, y tiene un destacado legado en varias ramas de la misma. En concreto, en geometría diferencial el legado de la RAC incluye, además de a Santaló, a Germán Ancochea, Manuel de León, Fernando Etayo, Javier Etayo, Pedro Luis García Pérez y Antonio Martínez Naveira.

De hecho, me gustaría resaltar que el profesor García Pérez, de la Universidad de Salamanca, fue uno de los primeros matemáticos españoles que publicó en geometría simpléctica y sus conexiones con la física en revistas de prestigio internacional, como pueden ser *Communications in Mathematical Physics* o el *Journal of Differential Geometry*. Todo ello sucedió en una época —los años 1960 y 1970— en la que esto era todavía infrecuente en España. En 1992, Bertram Kostant, uno de los padres de la teoría de cuantización geométrica, que es una materia relacionada con la geometría simpléctica, recibió un doctorado *honoris causa* en la Universidad de Salamanca.

Además, España ha contado y cuenta con escuelas destacadas en geometría re-partidas por toda nuestra geografía, que omito aquí por brevedad. Estas escuelas se enmarcan, en líneas generales, en una de las dos vertientes más fundamentales de la geometría: la **diferencial** y la **algebraica**.

## 4. GRANDES ÁREAS EN GEOMETRÍA: DIFERENCIAL Y ALGEBRAICA

Básicamente, uno puede estudiar las formas y sus propiedades (es decir, practicar la geometría) con el auxilio de dos herramientas en principio bastante alejadas la una de la otra: el cálculo diferencial, por un lado, y el álgebra por otro. Los matemáticos

normalmente se especializan en una de estas dos vertientes. Cada una de ellas tiene su interés, y es apropiada para tratar ciertos tipos de problemas.

*Grosso modo*, el cálculo diferencial es más útil para estudiar fenómenos geométricos *continuos* (por ejemplo, calcular rutas espaciales óptimas para un cohete) mientras que el álgebra es más útil para estudiar fenómenos *discretos* (por ejemplo, los métodos de pago con tarjeta de crédito por internet que están basados en contraseñas y teorías de los números enteros).

De modo más concreto, la **geometría diferencial** usa métodos del cálculo diferencial que se remontan a Isaac Newton y Gottfried Leibniz. Estos métodos se basan en conceptos tales como las *derivadas* e *integrales* (estudiados en bachillerato en el caso de una única variable  $x$ ), para calcular el área de figuras o el volumen de objetos tridimensionales.

Usando derivadas e integrales podemos calcular exactamente —o, en el peor de los casos, aproximar de forma precisa— la longitud de curvas complicadas en el espacio tridimensional, como puede ser, por ejemplo, la trayectoria de una de las muchas carreteras secundarias con numerosas curvas que discurren por regiones del norte de España, como Cantabria o el País Vasco. También, usando integrales, podemos calcular el volumen que encierra un flotador, o calcular la ruta más corta para ir de un punto a otro del flotador. Esto no es tan fácil como parece, porque la superficie del flotador está curvada. Es importante enfatizar que aunque visualmente no podemos ver objetos de dimensión cuatro o superior, matemáticamente existen y son necesarios para entender el mundo en que vivimos.

De hecho, casi todos los problemas a los que nos enfrentamos en la ciencia, la economía, etc., involucran muchas variables, es decir, *muchas dimensiones*. Por ejemplo, un problema de finanzas puede tener como variables el coste  $X$  de ciertos objetos, la cantidad  $Y$  de objetos, las ciudades  $Z$  donde estos objetos se pueden comprar, el peso  $T$ , etc. Cada variable define una dimensión, y esas dimensiones al final dan lugar a problemas y objetos multidimensionales. Por tanto, desde un punto de vista de aplicaciones, es importante entender los objetos definidos por múltiples variables, y de múltiples dimensiones.

Por otro lado, la **geometría algebraica** emplea técnicas del álgebra moderna, como los conceptos de grupo o anillo que se estudian en primero o segundo curso del grado en Matemáticas, para resolver o estudiar las propiedades geométricas de objetos que vienen definidos por ecuaciones que involucran un número finito de variables  $X, Y, Z, T, U, V$ , etc., sumadas y multiplicadas con distintos exponentes y coeficientes. Por ejemplo, la ecuación algebraica  $X + Y + Z = 1$  en el espacio tridimensional representa un plano infinito, que pasa por los puntos de coordenadas  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ . Si elevamos cada variable al cuadrado en la fórmula anterior, entonces la ecuación  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  representa una esfera de radio 1 con centro el punto de coordenadas  $(0, 0, 0)$ , es decir, el origen de los ejes del espacio tridimensional. Pero si seguimos jugando con los exponentes y los coeficientes las superficies y objetos resultantes se complican mucho. Los *geómetras algebraicos* estudian las características de estos objetos.

## 5. GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA: POCO INTUITIVA, LA MÁS FÍSICA Y FLEXIBLE, PERO CON ASPECTOS DE RIGIDEZ

Como hemos comentado, muchas partes de la geometría son intuitivas o están basadas en ideas intuitivas. Sin embargo, hay una parte de la geometría diferencial menos intuitiva y más bien alejada del modo de pensar usual, pero que es extraordinariamente importante y tiene mucho peso en aplicaciones: la *geometría simpléctica*. ¿Qué es la geometría simpléctica y por qué es menos intuitiva que las otras clases de geometría? Esta pregunta la vamos a intentar responder en lo que sigue.

### 5.1. MOVIMIENTOS PLANETARIOS: GALILEO, LAGRANGE Y NEWTON

Antes de centrarnos en comunicar qué es la geometría simpléctica, merece la pena comentar sus orígenes. Puede resultar chocante que siendo un tipo de materia menos intuitiva, esté profundamente conectada con el mundo físico. De hecho, se origina en los **estudios de los movimientos planetarios** llevados a cabo por los grandes científicos Leonhard Euler (1707-1883), Galileo Galilei (1564-1642), Christiaan Huygens (1629-1695), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Isaac Newton (1643-1727) hace ya más de tres siglos. El punto de vista más cercano al actual se remonta a Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) y William Rowan Hamilton (1805-1865) que aportaron una reformulación profunda de las ideas que les precedieron.

### 5.2. LOS DIAGRAMAS DE RAMÓN Y CAJAL

España ha tenido grandes científicos e intelectuales en prácticamente todas las ramas del conocimiento. Sin duda, una de las grandes figuras de la historia de la ciencia mundial es el premio nobel español **Santiago Ramón y Cajal** (1852-1934). El nombre de Ramón y Cajal se puede escuchar en todas las partes del mundo en conexión con el cerebro. Ramón y Cajal ya nos deleitaba con sus diagramas y dibujos planos que ilustraban de modo esquemático fenómenos de tres dimensiones sobre el cerebro humano. Pero, *¿qué tiene que ver esto con la geometría simpléctica?*

A grandes rasgos, podemos decir que mientras que para un científico del cerebro puede resultar útil esquematizar y dibujar secciones bidimensionales del cerebro, *un geómetra simpléctico hace lo análogo con objetos multidimensionales*.

Este tipo de esquematización corresponde, *grosso modo*, a hacer mediciones de áreas de secciones bidimensionales de los objetos multidimensionales, como si cortáramos una naranja y nos fijáramos en la sección abierta que resulta.

Por lo tanto, podemos decir que *la geometría simpléctica se basa en un uso sofisticado del concepto de área*. Todo ello contrasta con la geometría euclidiana (y de hecho con casi todos los tipos de geometría), que está más basada en el concepto de longitud/distancia, y es por tanto más visual.

### 5.3. RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD

La geometría simpléctica está bajo el paraguas de la geometría diferencial en el sentido de que los métodos que utiliza son principalmente los del cálculo diferen-

cial, sobre los cuales he comentado antes. Es decir, resuelve problemas utilizando principalmente métodos del cálculo diferencial de Newton y Leibniz.

Sin embargo, al estar enfocada en objetos multidimensionales, principalmente de dimensión cuatro o mayor, y además tener como objeto de estudio una noción sofisticada de área, *la geometría simpléctica es menos intuitiva*. Por ejemplo, casi siempre que hacemos dibujos, los hacemos en tres dimensiones, pero en geometría simpléctica las cosas interesantes pasan en espacios de cuatro dimensiones o más. Es más, por razones tanto físicas como matemáticas, los objetos multidimensionales que son objeto de estudio en geometría simpléctica siempre tienen como dimensión un número par, lo cual descarta la mayoría de los objetos que vemos en nuestro mundo tridimensional.

De hecho, la geometría simpléctica es una geometría especial, podríamos decir incluso peculiar, en tanto que *comparte facetas de rigidez, que por ejemplo exhibe la geometría euclidiana, con facetas de flexibilidad*. En este sentido, la geometría simpléctica involucra una combinación de fenómenos de naturaleza cualitativa con otros de naturaleza cuantitativa. A modo de ejemplo, podemos decir que un círculo y el mismo círculo deformado son similares cualitativamente. Sin embargo, las distancias entre los puntos que forman el círculo pueden haber cambiado con la deformación, y por tanto la situación ha cambiado cuantitativamente.

## 6. HITOS DE LA GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

Esta sección habla de algunos resultados profundos de la geometría simpléctica de modo divulgativo.

### 6.1. POINCARÉ Y SU ÚLTIMO TEOREMA GEOMÉTRICO

El gran sabio francés Henri Poincaré (1854-1912) ya nos decía [34]:

«No me cabe duda de que las matemáticas merecen cultivarse por sí mismas, y lo mismo digo para las teorías que no se aplican a la física y otras. Incluso cuando el objetivo físico y el estético no fuesen de la mano, no debemos sacrificar ninguno. Es más: los dos objetivos son inseparables y la mejor forma de alcanzar uno es intentar conseguir el otro, o al menos nunca perderlo de vista.»

Esta cita de Poincaré conecta bien con el importante trabajo que hizo al final de su vida, en sus investigaciones en mecánica celeste, y en el cual enunció uno de los grandes teoremas de la geometría.

En efecto, el punto de vista moderno en geometría simpléctica se remonta a los estudios de Poincaré en mecánica celeste, y más en concreto al famoso teorema conocido como el **teorema de Poincaré-Birkhoff**, o **último teorema geométrico de Poincaré** [35]. Este gran teorema fue enunciado y probado en algunos casos por Poincaré en 1912 y demostrado con completa generalidad [3] por el matemático americano George Birkhoff en 1913.

El teorema de Poincaré-Birkhoff parte de una anilla elástica que, digamos para entendernos, está hecha de goma o de un material deformable (figura 1). Imagine-mos que con una mano giramos el círculo interno en una dirección, y con la otra mano giramos el externo en la dirección opuesta. Pues bien, el teorema garantiza que **siempre hay al menos dos puntos que no se mueven de su posición inicial** (es decir, la posición que ocupaban antes de hacer la deformación), por muy complicada que sea la deformación que hacemos.

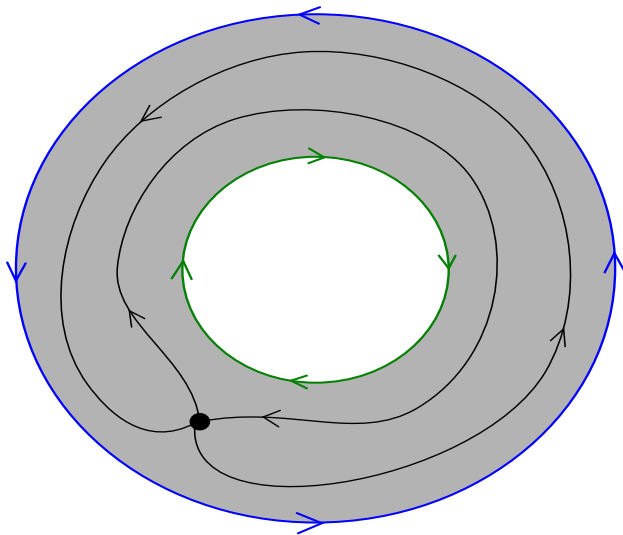


Figura 1: Ilustración del famoso teorema de Poincaré-Birkhoff.

## 6.2. LA CONJETURA DE ARNOLD

El teorema de Poincaré-Birkhoff, que es de dos dimensiones, se generaliza a cualquier dimension par, y en ese caso se conoce como la **conjetura de Arnold** [1], que es de los años 1960, y que fue formulada por el eminente matemático ruso Vladimir Arnold. La conjetura, que es una de las fuerzas precursoras de la geometría simpléctica moderna, nos garantiza un cierto número mínimo de puntos fijos para las deformaciones en dimensiones superiores.

A partir de la conjetura de Arnold y otros descubrimientos que tuvieron lugar en las décadas de los años 1970, 1980 y 1990, con trabajos de muchos matemáticos eminentes como Ralph Abraham, Charles Conley, Johannes J. Duistermaat, Yakov Eliashberg, Andreas Floer, Alexander Givental, Victor Guillemin, Mikhael Gromov, Helmut Hofer, Bertram Kostant, Paulette Libermann, George Mackey, Jerrold Marsden, Dusa McDuff, Clark Robinson, Jean-Marie Souriau, Shlomo Sternberg, Alan Weinstein y Eduard Zehnder, la geometría simpléctica se consolidó como una de las grandes áreas de las matemáticas modernas.

Dada su estrecha relación con la geometría simpléctica y sobre todo con sus orígenes físicos, me gustaría resaltar también que España cuenta con una destacada escuela en *mecánica geométrica*, con presencia en varios centros españoles. Uno de los promotores más visibles de esta escuela, tanto a nivel científico como a nivel de gestión, ha sido Manuel de León del Instituto de Ciencias Matemáticas de Madrid (ICMAT).

Además, me gustaría mencionar que tanto el teorema de Poincaré-Birkhoff como la conjetura de Arnold se pueden analizar en el mundo del azar, que en el caso de la conjetura de Arnold ha cristalizado en mi artículo [29] con mi colaborador Fraydoun Rezakhanlou, catedrático de la Universidad de California Berkeley, y con quien llevo trabajando desde 2008 en las interacciones entre sistemas dinámicos y geometría simpléctica en un contexto probabilístico. En [29] demostramos una **conjetura de Arnold probabilística**.

Ha habido tantos desarrollos en geometría simpléctica en las últimas décadas, que incluso tratarlos superficialmente está fuera de nuestros objetivos. Sin embargo, a modo representativo voy mencionar unos resultados de excepcional influencia.

### 6.3. CONLEY, ELIASHBERG, GROMOV, WEINSTEIN Y ZEHNDER

En 1981 Alan Weinstein, a quien hemos mencionado anteriormente, se refirió a la geometría simpléctica en su artículo [38] como

«[...] la geometría más flexible de las transformaciones canónicas (en particular, que preservan área) en vez de la rígida geometría euclidiana; por ello, las conclusiones de los argumentos geométricos son con frecuencia cualitativas en vez de cuantitativas.»

Esta flexibilidad de la que habla Weinstein es compatible en geometría simpléctica con manifestaciones profundas de **rigidez** descubiertas alrededor de esos años. A modo representativo es imposible no citar el trabajo de Yakov Eliashberg y Mikhael Gromov [11, 12, 16] sobre el fenómeno de rigidez simpléctica, a primeros de los años 1980, como un hito fundamental.

De hecho, los principios de los años 1980 fueron una época extraordinaria para la geometría simpléctica, con la demostración de Conley y Zehnder [8] de la conjetura de Arnold para el toro (un objeto geométrico en forma de rosquilla) en cualquier dimensión  $2d$ , y la demostración del **teorema de no estrujamiento** por Gromov [15], que dio en un artículo en el que introdujo en geometría simpléctica técnicas con *curvas pseudoholomorfas* y construyó el primer ejemplo de lo que se conoce como *capacidad simpléctica*. Una capacidad simpléctica es esencialmente un invariante que nos permite comprender propiedades esenciales de los espacios que uno estudia en geometría simpléctica; a estos espacios se los conoce formalmente como *variedades simplécticas* (las estudiamos en la sección 10).

Para dar una idea del teorema de no estrujamiento, supongamos que queremos meter una pelota sólida dentro de un cilindro infinitamente largo, pero de diámetro menor que el de la pelota. Imaginemos que la pelota es de gomaespuma, así que podemos estrujarla para que, aunque ocupe siempre el mismo volumen, se alargue

de forma que quepa dentro del cilindro. Pues bien, el teorema de Gromov nos dice que, aunque tengamos éxito metiendo la bola dentro del cilindro manteniendo su volumen inicial, al estrujarla hemos cambiado necesariamente las áreas de las secciones bidimensionales (recordemos: aquellas que resultan de cortar la pelota en rodajas); es decir, habremos destruido las estructuras simplécticas.

Por tanto, desde el punto de vista de la geometría simpléctica, la pelota no se puede estrujar en un cilindro con menor radio y de ahí que este resultado se conozca como teorema de no estrujamiento. En realidad, el teorema se refiere a pelotas y cilindros de dimensión cuatro o mayor, pero sirva esta analogía más visual para captar la esencia del resultado. En una conferencia<sup>2</sup> en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, dirigida principalmente a un público matemático, doy una breve introducción a estas ideas.

#### 6.4. PUENTES ENTRE MUNDOS MATEMÁTICOS

Ha habido muchos otros resultados importantes en geometría simpléctica en las últimas décadas; algunos son fascinantes en cuanto que establecen puentes entre ella y otros mundos de las matemáticas, como el mundo de los polígonos y sus generalizaciones a dimensiones mayores, los politopos. En una conferencia<sup>3</sup> que impartí en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España comento algunos de estos trabajos, realizados por Michael Atiyah [2] y los ya mencionados Guillemin y Sternberg [17] en los años 1980. Comentaré estos resultados al final del artículo.

Aparte de la geometría algebraica y los sistemas dinámicos, la geometría simpléctica está conectada con otras muchas materias dentro de la matemática y la física puras y teóricas, como el análisis microlocal, la teoría de representaciones y las ecuaciones en derivadas parciales. Además, las aplicaciones de la geometría simpléctica son extensas e incluyen problemas en espectroscopía molecular, física de plasmas, cálculo de órbitas espaciales, mecánica de fluidos, teoría de la elasticidad y robótica.

Por ejemplo, mencionando otra conexión destacada con la matemática pura, Terry Tao nos dice (en MathOverflow<sup>4</sup>) por qué la geometría simpléctica es tan importante en la teoría moderna de ecuaciones en derivadas parciales:

«[...] una de las grandes visiones de la mecánica cuántica (o, en el lado matemático, el análisis semiclásico) es el principio de correspondencia que dice, *grosso modo*, que el comportamiento de los observables cuánticos converge en el límite de alta frecuencia (o, después de reescalar, el límite semiclásico) al comportamiento análogo de los observables clásicos.»

Tao prosigue diciendo que:

«[...] la correspondencia es más fácil de ver en el lado de los observables que en el lado físico, por ejemplo conectando el álgebra de Von Neumann de observables cuánticos acotados con símbolo diferenciable con el

<sup>2</sup><https://www.youtube.com/watch?v=WMAOkLkh8EO&t=1s>

<sup>3</sup>[https://www.youtube.com/watch?v=WgkS\\_2TGX40](https://www.youtube.com/watch?v=WgkS_2TGX40).

<sup>4</sup><https://mathoverflow.net/q/98126>.

álgebra de Poisson de observables diferenciables clásicos. El primero está conectado con EDP lineales y el segundo con la geometría simpléctica (o hamiltoniana).»

## 7. APLICACIONES A SISTEMAS DINÁMICOS Y MISIONES ESPACIALES

Un **sistema dinámico** viene dado por la evolución de objetos o variables físicas, económicas o puramente matemáticas a lo largo del tiempo. Es difícil dar unos pasos en nuestro mundo sin ver múltiples sistemas dinámicos. Por ejemplo, el movimiento de una hoja desplazada por el viento nos describe un sistema dinámico. Otro ejemplo viene dado por el movimiento de las manillas de un reloj (figura 2). Por tanto, los sistemas dinámicos están por todas partes.



Figura 2: Un sistema dinámico (el reloj pertenecía a mis abuelos).

Las reglas que determinan los sistemas dinámicos suelen venir dadas por ecuaciones que involucran derivadas de funciones (como la velocidad, la aceleración, etc.). Las soluciones de las ecuaciones dan las órbitas del sistema y, *grosso modo*, el objetivo de la teoría de sistemas dinámicos es estudiar las propiedades cualitativas de las órbitas o trayectorias, por ejemplo, si las órbitas son círculos, rectas, parábolas... , y cuál es el comportamiento a largo plazo del sistema, es decir, si las órbitas se quedan confinadas en cierta región, o si, por el contrario, se van al infinito.

Uno de los puntos de vista centrales en geometría simpléctica ha sido el *dinámico*. La conexión **geometría simpléctica – sistemas dinámicos** es fundamental en las matemáticas modernas. El propio Poincaré tenía una visión unificada de la geometría simpléctica y de los sistemas dinámicos, aunque su punto de vista se acabó difuminando con el tiempo, hasta la década de los años 1990, desde la cual se ha venido recuperando en gran medida.

Uno de los propulsores de este punto de vista en las últimas dos o tres décadas ha sido Helmut Hofer, eminente catedrático de la Escuela de Matemáticas del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, y que hemos mencionado anteriormente. Junto con el también distinguido matemático de la Universidad de Princeton, John Mather (1942-2017), Hofer organizó en el curso académico 2011-2012 un año especial exploratorio sobre las aplicaciones de la geometría simpléctica a los sistemas dinámicos, que reunió expertos de todo el mundo para avanzar en el estudio de las conexiones entre los sistemas dinámicos y la geometría simpléctica.

Durante esa época yo era miembro del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y Helmut Hofer me encargó presentar al patronato del instituto las ideas principales de la geometría simpléctica, y cómo se pueden aplicar con éxito al estudio de los sistemas dinámicos, lo cual hice en la reunión del patronato del otoño de 2011. Además en esa reunión conté una aplicación de la geometría simpléctica a misiones espaciales.

De hecho, **la geometría simpléctica fue esencial para salvar una misión de la agencia espacial japonesa en 1990 que se daba por perdida.** En efecto, en 1990 la agencia espacial japonesa lanzó una gran astronave al espacio, que se separó en dos. Su objetivo era poner una de ellas en órbita alrededor de la Luna. Pero, debido a una avería, la perdieron. Su única esperanza para salvar la misión era poner la otra en órbita alrededor de la Luna, pero no había suficiente combustible para ello. El matemático Edward Belbruno se enteró del problema y aportó una ingeniosa solución, basada en principios básicos de geometría simpléctica y sistemas dinámicos, para conseguir que la nave entrase (aprovechando o considerando, entre otras cosas, las fuerzas gravitatorias del Sol y de la Tierra) en la órbita lunar que se buscaba con el poco combustible que quedaba, salvando así la misión.

En la actualidad, los métodos avanzados de geometría simpléctica que han desarrollado Yakov Eliashberg, Helmut Hofer y sus colaboradores y escuelas se están tratando de aplicar, en colaboración con importantes agencias espaciales, para la optimización de las trayectorias a seguir por las naves espaciales, de tal modo que se use el mínimo combustible posible.

## 8. APLICACIONES A SISTEMAS DINÁMICOS INTEGRABLES

Un tipo crucial de sistemas dinámicos son los conocidos como *integrables*. Estos sistemas han sido el foco de mi investigación en las últimas dos décadas. Su característica principal es que conservan muchas cantidades físicas durante el movimiento, como por ejemplo energía o momento.

De hecho, mi línea de investigación principal son las aplicaciones de la geometría simpléctica al estudio de los sistemas dinámicos integrables, clásicos o cuánticos, y sobre este tema los lectores interesados pueden consultar las conferencias que impartí en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España<sup>5</sup> así como en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton en Estados Unidos.<sup>6</sup>

<sup>5</sup>[https://www.youtube.com/watch?v=WgkS\\_2TGX40](https://www.youtube.com/watch?v=WgkS_2TGX40).

<sup>6</sup><https://www.youtube.com/watch?v=cGVc3mpMB4Q&t=1s>.

## 8.1. PÉNDULOS, OLAS DE AGUA Y UN PREMIO ABEL PARA KAREN UHLENBECK

Entre los muchos sistemas dinámicos integrables se encuentran modelos físicos esenciales como el péndulo esférico, los acoplamientos de *spins* con osciladores, peonzas y los momentos angulares acoplados. Por ejemplo, la figura 3 muestra un *spin* en la esfera de radio 1 y un oscilador en el plano. Matemáticamente este es un espacio de cuatro dimensiones: el producto de una esfera de dimensión dos y de radio 1 con un plano. Los puntos de este espacio cuatridimensional tienen cuatro coordenadas  $(a, h, x, t)$ : dos coordenadas  $(a, h)$  provenientes de la esfera (ángulo y altura), y dos coordenadas provenientes del plano  $(x, y)$ .

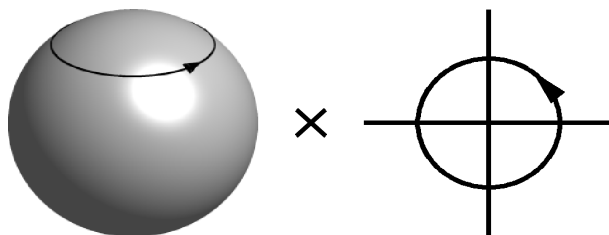


Figura 3: Acoplamiento de *spin* y oscilador: el modelo de Jaynes-Cummings.

Otros ejemplos famosos de sistemas integrables son la **ola de agua suave** (KdV), que es de dimensión infinita y llevó mas de 100 años saber que era integrable, y el **péndulo esférico**, que es de dimensión finita.

Muchos matemáticos han sido pioneros en el estudio de los sistemas dinámicos integrables, incluyendo a Vladimir Arnold, Johannes J. Duistermaat, Lars H. Eliasson, Anatoly Fomenko, Victor Guillemin, Nigel Hitchin, Andrei Kolmogorov, Sofya Kovalévskaya, Robert Langlands, Jürgen Moser, Emmy Noether, Nicolai Reshetikhin, Karen Uhlenbeck y Alan Weinstein, entre muchos otros.

Entre las contribuciones históricas más notables a sistemas dinámicos integrables que han influido en mi trabajo me gustaría destacar las de **Johannes J. Duistermaat** (1942-2010), que es uno de los matemáticos holandeses más importantes del siglo XX, además de un pionero en análisis, geometría simpléctica y sistemas integrables. Fue Duistermaat quien en 1980 introdujo las famosas coordenadas globales acción-ángulo. Por otro lado, la gran **Sofya Kovalévskaya** (1850-1891) fue una pionera en análisis y ecuaciones diferenciales que aportó ideas esenciales a sistemas dinámicos, integrables o no, y descubrió la *peonza de Kovalévskaya* en un artículo en *Acta Mathematica* de 1889. Fue la primera mujer con un doctorado en matemáticas y en ganar una cátedra en matemáticas en el norte de Europa y está considerada la matemática más importante anterior al siglo XX.

Asimismo, es imposible no mencionar a **Emmy Noether** (1882-1935) que es considerada una de las figuras más importantes de la historia en matemáticas y contribuyó a muchos aspectos del álgebra y la física matemática, llegando a aportar ideas cruciales acerca de sistemas integrables, en relación por ejemplo con la corres-

pondencia entre simetrías y leyes de conservación. Albert Einstein y Hermann Weyl la consideraron la matemática más importante de la historia.

Por otro lado, recientemente la Academia Noruega de Ciencias y Letras concedió el Premio Abel 2019 a la eminente matemática estadounidense **Karen Uhlenbeck** «[...] por sus logros pioneros en teoría geométrica de ecuaciones en derivadas parciales, teoría gauge y sistemas integrables, y por el impacto fundamental de su trabajo en análisis, geometría y física matemática».

Los matemáticos tienen diferentes motivaciones para estudiar los sistemas dinámicos integrables. Entre ellas, voy a resaltar tres que me parecen notables, pero hay muchas más. Primero, estos sistemas juegan un papel crucial en describir fenómenos de la física, la química y otras ciencias. Segundo, tienen una conexión profunda con los sistemas dinámicos generales mediante la **teoría KAM de pequeñas perturbaciones** (teoría de Kolmogorov-Arnold-Moser). Y, en tercer lugar, existen relaciones profundas entre los sistemas dinámicos integrables y la topología, por ejemplo a través de la teoría de fibraciones singulares de la escuela rusa.

Uno de los autores de la teoría KAM es el matemático americano-alemán **Jürgen Moser**, que fue central en impulsar los sistemas integrables en el siglo XX. Moser fue líder mundial en análisis, profesor en el MIT, NYU y ETH Zürich. En los *proceedings* de su conferencia plenaria [25] en el Congreso Internacional de Matemáticos en Berlín (1998) indica que «es imposible incluso mencionar superficialmente las muchas ramificaciones surgidas del estudio de los sistemas integrables».

Moser, que era conocedor de muchas áreas de matemática pura y aplicada, nos dice en el citado trabajo [25]:

«Lo que me resultó más llamativo fue el desarrollo de los sistemas integrables (hace unos 30 años), que no vino de ningún problema concreto, sino de un fenómeno descubierto en experimentos numéricos de dinámica de fluidos.

»Estudios inteligentes y profundas intuiciones abrieron camino a un nuevo campo conectado con la geometría diferencial, la geometría algebraica y la física matemática, incluyendo la comunicación con fibras ópticas.»

## 8.2. ¿QUÉ ES EL PROBLEMA DEL TAMBOR?

Como se comenta en mi artículo [26], una de mis motivaciones para estudiar sistemas integrables surge de trabajos en química/física de varios investigadores, incluyendo los grupos de Frank De Lucia en la Universidad Estatal de Ohio (Estados Unidos), Mark Child en Oxford (Gran Bretaña), Jonathan Tennyson en University College London (Gran Bretaña), Boris Zhilinskii en Dunkerque (Francia) y Marc Joyeux en Grenoble (Francia). *Grosso modo*, el tipo de pregunta que se plantean es en espectroscopía cuántica molecular: **¿se puede oír la forma de las moléculas?** o de modo similar **¿se pueden oír las órbitas de las moléculas en el espacio?** Hablando en jerga técnica, estos son problemas inversos cuánticos, cuyo objetivo es obtener información clásica a través de información espectral cuántica.

Este tipo de problema inverso es famoso en geometría y en análisis matemático. El problema se origina en Hermann Weyl (1885-1955) y Salomon Bochner (1899-1982)



Figura 4: ¿Se puede oír la forma de un tambor?

a finales del siglo XIX y principios del XX, y su estudio fue impulsado de nuevo por Moser en los años 1970. Realmente el problema lo hizo famoso el matemático Marc Kac (1914-1984) en los años 1960, con un artículo [19] (en inglés) titulado *¿Se puede oír la forma de un tambor?*

El problema se puede explicar con una analogía. Imagina que estás leyendo el periódico en el salón de tu casa y que, en una habitación cercana, tu hija está tocando su nuevo tambor (figura 4), el cual no has visto, y por ello no sabes cómo es. Sin embargo, desde el salón puedes escuchar perfectamente la superposición de frecuencias emitidas. La pregunta se puede formular de modo equivalente: ¿podrías dibujar la forma del tambor solo escuchando los sonidos que emite?

En general se sabe [13, 14] que la respuesta es no (1992), pero en el contexto de sistemas dinámicos integrables hay ocasiones (de gran importancia) en las cuales la respuesta es sí. Entender para qué sistemas podemos dar una respuesta afirmativa ha sido la principal motivación de mi investigación en geometría simpléctica. Pero, ¿qué tiene que ver la geometría simpléctica con este problema?

La respuesta es que mucho. Para entenderlo, podemos pensar de nuevo en una analogía. El tambor emitiendo sonidos es un sistema dinámico. Los sonidos que oímos corresponden a superposición de frecuencias de energía, que matemáticamente son los autovalores del sistema, y a los que se llama *espectro*. Para obtener toda la información del sistema dinámico integrable a través del espectro lo que se usa es geometría simpléctica: se captura toda la información del sistema dinámico (clásico) en el espectro (cuántico) usando como herramienta la geometría simpléctica.

### 8.3. SOLUCIONES AL PROBLEMA DEL TAMBOR

Entre los años 2009 y 2022 han aparecido una serie de artículos [5, 20, 21, 30, 31, 32, 33] en los que Laurent Charles (La Sorbona), Yohann Le Floch (Universidad de Estrasburgo), San Vũ Ngọc (Universidad de Rennes 1) y yo mismo probamos que la respuesta es afirmativa cuando el sistema dinámico es *integrable y periódico* (lo que se llama *dinámica tórica*), o cuando el sistema es *integrable y casi periódico* (*dinámica semitórica*). Estos casos incluyen a varios sistemas dinámicos famosos.

Por tanto, del espectro de un sistema dinámico cuántico (que viene dado por operadores semiclásicos), se puede extraer completamente el comportamiento del sistema dinámico clásico asociado (dado por los símbolos principales de los operadores). Un resumen de estos trabajos aparece en mis artículos [27, 28].

Un importante precedente de estos trabajos se remonta al catedrático francés Yves Colin de Verdière [7, 6] (que trata el caso cuando la dinámica es integrable y periódica en el contexto de operadores pseudodiferenciales alrededor de 1980).

Muchos otros autores han hecho contribuciones importantes a problemas inversos relacionados con la geometría simpléctica y otros tipos de geometría, incluyendo, por ejemplo, a Duistermaat, Guillemin, Hörmander, Moser, Sarnak, Sjöstrand, Uhlmann, Weinstein, Zelditch y Zworski.

#### 8.4. RETO FUTURO Y MÁS CONTENIDO

Mis colaboradores y yo hemos llevado a cabo los pasos anteriores para sistemas integrables con dinámica tórica y semitórica, como he mencionado en la sección 8.3, y por tanto resuelto el problema del tambor en estos casos. Un reto es construir invariantes de sistemas dinámicos integrables más generales. Es de esperar que ello ocupe a los matemáticos durante bastantes años, posiblemente décadas. Una vez esto esté conseguido, otro reto es resolver el problema cuántico del tambor para dichos sistemas dinámicos integrables (cuyos invariantes conoceríamos).

### 9. ¿CÓMO SE RESUELVE EL PROBLEMA DEL TAMBOR?

Esencialmente lo que cuento aquí es que para resolver el problema del tambor planteado en la sección 8.2, lo primero que hay que hacer es comprender exactamente cuál es la información dinámica esencial del problema, es decir, hacer lo posible para reducir toda la información dada por el sistema a algo sencillo: invariantes. Lo que se puede hacer en ciertos casos es reducir toda esa información a los siguientes invariantes: un polígono, varios puntos dentro del polígono, y para cada punto varias etiquetas matemáticas (ciertos números).

Como segundo paso, nos fijamos en el espectro del sistema, y calculamos en él los invariantes. ¡Como los invariantes contienen toda la información del sistema, hemos acabado! A continuación comento esto con un poco más de detalle. Desde el punto de vista de un geómetra simpléctico, el problema se plantea como una pregunta inversa: **si conocemos el espectro de unos operadores semiclásicos  $T_1, \dots, T_n$**  (es decir, *si oímos el tambor*), **¿podemos sacar los símbolos principales de los operadores?** (es decir, *¿podemos sacar la forma del tambor?*).

#### 9.1. PRIMER PASO: CONSTRUIR INVARIANTES

El primer paso que hay que dar es usar geometría simpléctica para clasificar sistemas integrables en términos de invariantes. Estos invariantes pueden ser números, polígonos, grupos, etc., que determinen el sistema. Un invariante es un objeto o

variable sencilla que codifica información complicada sobre una estructura matemática (por ejemplo, dada por un sistema dinámico), de tal modo que si uno conoce este objeto o variable, mediante una serie de pasos conocidos se puede deducir la estructura matemática al completo. Las estructuras matemáticas que se consideran equivalentes tienen los mismos invariantes.

En otras palabras, **queremos entender lo complicado (estructura matemática) en términos de lo sencillo (invariantes)**. Básicamente, los invariantes son paquetes de información simplificada, que a pesar de esta sencillez se puede probar que contienen información (por complicada que sea) de cierta estructura o construcción matemática.

En general, no es fácil construir invariantes, y menos conseguir una colección *completa* de invariantes, en el sentido de que dicha colección nos proporcione todo el conocimiento del sistema original. Gran parte de la geometría, y de las matemáticas en general, están enfocadas en la construcción de invariantes.

En el caso que tenemos entre manos, esa estructura matemática son los sistemas dinámicos integrables. En el proceso de encontrar los invariantes de los sistemas dinámicos integrables, juegan un papel crucial las técnicas de geometría simpléctica para estudiar fibraciones singulares, estructuras afines singulares, comportamientos asintóticos de flujos de campos vectores, construcciones analíticas de cortar y pegar, teoremas de linealización de singularidades, teoremas de convexidad geométrica, etc.

Pero los sistemas dinámicos integrables son complicados, y se conocen pocos de sus invariantes. Sin embargo, hay dos clases de sistemas dinámicos integrables cuyos invariantes se conocen completamente, y que comento a continuación.

El caso más sencillo es el de los sistemas con dinámica integrable y periódica, que los matemáticos llaman **sistemas tóricos**. En este caso el sistema tiene un único invariante que es un politopo convexo.

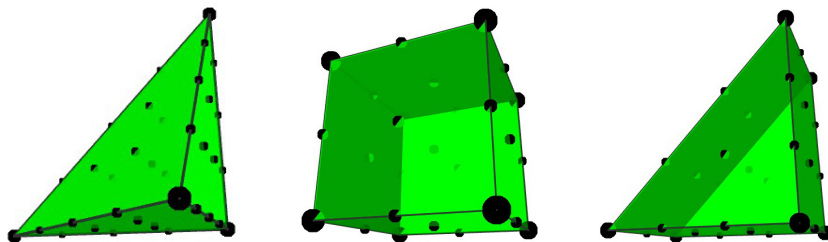


Figura 5: Politopos tridimensionales de sistemas dinámicos integrables tóricos.

Los politopos son estructuras geométricas rígidas, determinadas por sus vértices. Hay politopos de cualquier dimensión (figura 5), pero no podemos visualizarlos a partir de dimensión cuatro. Este politopo se construye a partir de las cantidades conservadas del sistema, y los físicos lo conocen como **espectro clásico**.

Para ver cómo se obtiene este politopo recordemos que un sistema dinámico integrable viene dado por un número finito de cantidades conservadas, digamos  $c_1, \dots, c_n$ . Cada una de ellas es una función cuyo dominio es la variedad simpléctica y

cuyo codominio el conjunto de todos los números (reales). Pues, bien, si las ponemos una a continuación de la otra  $(c_1, \dots, c_n)$ , obtenemos una función  $f$ , cuyo dominio es de nuevo la variedad simpléctica, y cuyo codominio es el espacio  $n$ -dimensional de puntos con  $n$  coordenadas (reales). La imagen de esta función  $f$  es el politopo del que venimos hablando.

Resulta sorprendente que esta imagen sea un politopo y no una figura con una forma arbitraria, con curvas etc. De hecho, fueron el medallista Fields **Michael Atiyah** y de modo independiente **Victor Guillemin** y **Shlomo Sternberg** quienes demostraron en 1982 que esta figura arbitraria siempre es un politopo [2, 17]. Este resultado se conoce como el **teorema de convexidad de la geometría simpléctica**.

Unos años más tarde, en 1988, Thomas Delzant demostró [10] que este politopo es un invariante completo de los sistemas dinámicos integrables tóricos, en el sentido de contener toda la información matemática acerca de los mismos, sin excepción. El hecho sorprendente y profundo es que todo el comportamiento de un sistema dinámico integrable de tipo tórico está codificado por este politopo convexo. Podemos, por lo tanto, decir que hay un puente que comunica el mundo de los sistemas dinámicos integrables cuya dinámica es integrable y periódica, con el mundo de los politopos.

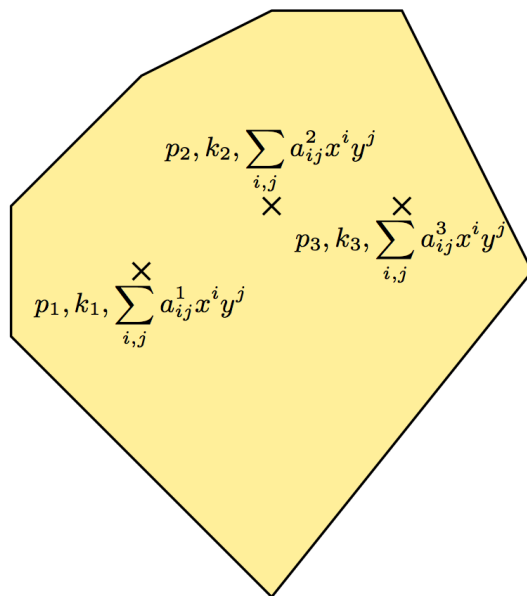


Figura 6: Los invariantes de los sistemas semitóricos.

El otro caso que se entiende es el de los sistemas con dinámica integrable y casi periódica, que los matemáticos llaman **semitóricos**, en dimensión cuatro.

En este caso, además de un politopo (de hecho, un polígono, es decir un politopo de dimension dos), hay otros invariantes interesantes: varios puntos dentro del politopo, y cada uno de estos puntos con una etiqueta dada por una serie de Taylor y un número entero (figura 6). Estos invariantes forman un **invariante completo**, es decir, tienen toda la información matemática sobre el sistema. Los puntos singulares vienen de lo que se conoce como puntos críticos del sistema de tipo foco-foco. Por tanto, una estructura matemática complicada (el sistema semitórico) lo tenemos reducido a algo sencillo (invariantes, que en este caso son un polígono y varios puntos con etiquetas). Este resultado aparece en mis artículos [30, 31].

## 9.2. SEGUNDO PASO: DETECTAR INVARIANTES

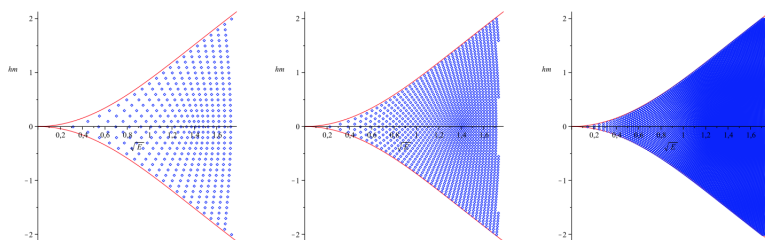


Figura 7: Del espectro sacamos los invariantes del sistema clásico asociado.

El segundo paso es usar análisis matemático para demostrar que los invariantes se pueden detectar en el espectro cuántico (figura 7), que matemáticamente corresponde (en el caso por ejemplo de ciertos sistemas tóricos) a los trapezoides previos llenos de puntos. Una vez que hemos detectado los invariantes en el espectro hemos acabado, porque, por el primer paso, podemos deducir toda la estructura del sistema dinámico integrable. Es decir, lo que uno hace es demostrar matemáticamente que *del conocimiento del espectro se obtiene el conocimiento de los invariantes*. **¡Y una vez que conocemos los invariantes ya conocemos el sistema!** De momento, sabemos cómo llevar a cabo estos dos pasos solo con sistemas dinámicos integrables tóricos y sistemas dinámicos integrables semitóricos.

## 10. APÉNDICE: MATEMÁTICAS DE LA GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

El abc matemático de la geometría simpléctica se resume en que trata con objetos multidimensionales y para estudiarla con estándares matemáticos hay que usar las llamadas **variedades diferenciables** y **formas diferenciales**. Incluyo este apéndice para ayudar a lectores con interés en formalismo matemático a asociar los conceptos previos con ideas matemáticas más concretas.

### 10.1. VARIEDADES DIFERENCIABLES

De modo matemático, los objetos multidimensionales de los que venimos hablando se conocen como *variedades diferenciables*, y suelen denotarse por  $M$ . Pueden ser de cualquier dimensión. Por ejemplo, las variedades diferenciables de dimensión uno son las curvas y las rectas, las variedades diferenciables de dimensión dos son las superficies (como por ejemplo un plano o una esfera).

Básicamente, una variedad diferenciable es un objeto de cualquier dimensión que es localmente sencillo. Por ejemplo, en el caso de variedades bidimensionales  $M$ , es decir, superficies, esto quiere decir que si nos situamos en cualquier punto  $p$  de  $M$ , lo que vemos a nuestro alrededor es básicamente lo mismo que si nos situamos en el origen  $(0,0)$  del plano usual. Esto mismo se generaliza a tres dimensiones, y en general a cualquier número de dimensiones.

Debido a esta sencillez local, se puede definir el plano tangente a la superficie en cada punto, que podemos entender como *una aproximación lineal* a la variedad diferenciable cerca del punto, del mismo modo que en bachillerato nos explican que la recta tangente al grafo (es decir, el dibujo de los puntos que representa la función) de una función  $f(x)$  de una variable  $x$  en un punto es una aproximación lineal al grafo de la función cerca de ese punto. Esto se generaliza a cualquier dimensión  $n$ , es decir, si la variedad diferenciable tiene dimensión  $n$  su aproximación lineal es un espacio vectorial de dimensión  $n$ , el **espacio tangente**  $T_p M$  (para cada punto  $p$ ).

En el grado en Matemáticas de casi todas las universidades españolas hay una asignatura de tercer o cuarto curso que lleva por nombre *Variedades Diferenciables*. Por tanto, su estudio requiere bagaje matemático.

### 10.2. FORMAS DIFERENCIALES

Las *formas diferenciales* son unos objetos matemáticos cuya definición es sofisticada, aquí nuestro objetivo es darnos cuenta de por qué son tan importantes, de dónde vienen históricamente hablando y, *grosso modo*, para qué sirven. Las formalidades matemáticas se pueden encontrar en muchos libros de texto y artículos.

Los ejemplos básicos de forma diferencial son  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , que son los símbolos respecto a los cuales se integran funciones de una variable  $x$ , por ejemplo en

$$\int f(x) dx.$$

El símbolo matemático  $dx$ , que al hacer integrales en bachillerato lo usamos pero realmente no sabemos qué es, se conoce como una *1-forma diferencial*. Combinando diferentes 1-formas entre ellas se construyen *2-formas diferenciales*  $dx \wedge dy$ , o *3-formas diferenciales*  $dx \wedge dy \wedge dz$ . Y así sucesivamente. Aquí las variables  $(x, y, z)$  representan las coordenadas de un punto en un espacio tridimensional, o de modo más general, en una variedad tridimensional. Para entendernos, podemos pensar que cada coordenada es una variable económica (por ejemplo, precio), física (por ejemplo, energía), o simplemente matemática.

Estas formas diferenciales tienen un significado matemático preciso, y hay una extensa teoría acerca de las mismas, que viene en gran parte motivada por teoremas

provenientes de la física. De hecho, previo a esta teoría matemática, las formas diferenciales y sus propiedades se usaban ya ampliamente por los físicos.

Es impresionante cómo los físicos han tenido durante mucho tiempo, previo al desarrollo formal de las matemáticas que hay por detrás, la capacidad para usar con tremendo éxito las formas diferenciales, mostrando una vez más la profunda importancia que tiene la física para el desarrollo de las matemáticas. Gracias a la teoría matemática, las ideas de los físicos se han extendido incluso más, y han dado lugar a avances en ambos campos.

De hecho, las interacciones entre física y matemáticas son numerosas en ambas direcciones, y cada una de estas disciplinas se beneficia de ideas que tienen lugar en la otra. Es importante recordar que hasta hace no mucho la distinción entre física y matemáticas era nebulosa, por tanto cuando me refiero a físicos, también estoy pensando en científicos que podían considerarse tanto matemáticos como físicos. Hoy la distinción está más marcada pero las relaciones son extensas.

### 10.3. VARIEDADES SIMPLÉCTICAS

Las áreas de secciones planas en variedades diferenciables se miden con lo que los matemáticos llaman una **forma simpléctica**, o **estructura simpléctica**, que es, para los matemáticos, una 2-forma diferencial  $\omega$  sobre la variedad, que es **no degenerada** y **cerrada**. Cuando consideramos una variedad diferenciable  $M$  y una forma simpléctica  $\omega$  sobre ella, simultáneamente, tenemos lo que se conoce como una **variedad simpléctica**, que se denota por  $(M, \omega)$ . La geometría simpléctica se dedica al estudio de las características y propiedades de las variedades simplécticas, así como a sus aplicaciones.

Básicamente, una forma simpléctica viene dada por una **forma bilineal anti-simétrica no degenerada**  $\omega_p$  en cada punto  $p$  del espacio tangente a la variedad diferenciable.

Es decir, si cogemos dos vectores  $u, v$  tangentes a una variedad en un punto  $p$ , es decir, pertenecientes al espacio tangente  $T_p M$ , gracias a la forma simpléctica obtenemos un número  $\omega_p(u, v)$ , que podemos interpretar como el área del paralelogramo que expanden estos vectores. Por ejemplo, si estamos en un espacio de dos dimensiones, los vectores tienen dos coordenadas  $(u_1, u_2)$  y  $(v_1, v_2)$ , y esta área corresponde al producto cruzado de estas coordenadas, es decir, el determinante de la matriz que definen. Si cambiamos los vectores de orden, el determinante cambia de signo, por tanto una forma simpléctica nos puede dar un área negativa (por la propiedad de antisimetría). Además, esta colección de formas bilineales  $\omega_p$ , donde  $p$  varía sobre la variedad diferenciable  $M$ , tiene que satisfacer una ecuación global,  $d\omega = 0$ , que es la condición de ser **cerrada**.

Con esta noción *infinitesimal* de área podemos dar el salto y calcular el área de cualquier superficie  $S$  dentro de una variedad simpléctica, de igual modo que en primer curso de los grados en matemáticas, física, etc., nos enseñan a integrar funciones de dos variables, pero aquí teniendo en cuenta que estamos con una superficie curvada dentro de un espacio multidimensional. Es decir, el área expandida por una superficie  $S$  viene dada por la integral  $\int_S \omega$ . El hecho de que  $\omega$  es cerrada

nos dice que si cogemos dos pequeñas superficies  $S, S'$  que tengan la misma curva  $\gamma = \partial S = \partial S'$  como borde, entonces ambas tienen la misma área, lo cual resulta chocante con el modo usual de pensar, donde cuanto más grande sea la superficie mayor será el área.

Un ejemplo sencillo de variedad simpléctica es cualquier superficie equipada con una llamada *forma de área* (un procedimiento para medir áreas en la superficie), que en dos dimensiones es lo mismo que una forma simpléctica.

Probablemente en dimensiones más altas el ejemplo más famoso y simple de variedad simpléctica es el espacio euclidiano de todos los puntos  $p = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  con primera coordenada  $x_1$ , segunda coordenada  $y_1$  y así sucesivamente. Este es un espacio de  $2n$  dimensiones, una dimensión por coordenada.

Formalmente, a este espacio de  $2n$  dimensiones se le puede equipar con una forma simpléctica  $\omega$ , pensando en dicho espacio como un producto de  $n$  planos, y en cada plano tenemos una forma de área, y luego sumándolas todas. Juntando todas estas ideas podríamos decir que el área expandida por una superficie en este espacio  $2n$ -dimensional corresponde a la suma de las áreas de las figuras resultantes de proyectar nuestra superficie sobre estos  $n$ -planos.

Para ilustrar cómo se relacionan estas formalidades matemáticas con lo que hemos visto en secciones anteriores, y a modo de ejemplo, decir que el estrujamiento que se menciona en el teorema de Gromov que vimos anteriormente, matemáticamente corresponde al concepto de *encaje/embedding*, al que además se pide compatibilidad con las formas simplécticas de la pelota y el cilindro, ambas consideradas como variedades simplécticas. Por tanto, el resultado dice que si  $R > r$  entonces no existe ningún *embedding* de una bola de dimensión  $2n$  y radio  $R$ , a un cilindro de dimensión  $2n$  y radio  $r$ , y que sea compatible con las estructuras simplécticas en dominio y origen (formalmente, que el *pullback* por el *embedding* de una coincida con la otra).

#### 10.4. PROPIEDADES DE LAS VARIEDADES SIMPLÉCTICAS

No toda variedad diferenciable admite una forma simpléctica. Se puede verificar usando álgebra lineal que las variedades simplécticas tienen dimensión par. Además, se puede demostrar que **si una variedad simpléctica es compacta, sus llamados grupos de cohomología  $H_{\text{dR}}^{2k}(M)$  son no triviales** (motivo: la  $k$ -potencia de la forma simpléctica define una clase no trivial en el grupo  $2k$ ). Estos grupos de cohomología, cuya construcción es avanzando y está fuera de los objetivos de nuestro breve artículo, son una construcción matemática que permite a los matemáticos distinguir entre distintas variedades simplécticas, que pueden tener la misma apariencia, pero no son realmente equivalentes desde un punto de vista matemático. Debido a estas restricciones, la única esfera que admite una forma simpléctica es la 2-esfera  $S^2$ . El motivo es que las esferas de dimensión par mayor que 2 tienen grupos de cohomología triviales.

Además, las variedades simplécticas tienen una propiedad que las hace ser distintas de otras variedades geométricas: todas son **localmente equivalentes**. Este sorprendente resultado, que se debe a Darboux [9], es de finales del siglo XIX. Más formalmente, el teorema dice que si nos situamos en puntos distintos de dos varia-

des simplécticas, siempre hay pequeños entornos de esos puntos y una transformación diferenciable entre los mismos que preserva las estructuras simplécticas.

Como las variedades simplécticas no tienen invariantes locales, **a la geometría simpléctica se la considera una materia que estudia propiedades o invariantes globales de las variedades simplécticas**. Es por ello una materia muy distinta de, por ejemplo, la geometría riemanniana, donde la curvatura de la variedad riemanniana (es decir, cómo de curvado está un objeto) es un invariante local. Ello no quita, por ejemplo, que haya muchos problemas de gran importancia en geometría simpléctica que tienen un carácter local, pero no se refieren a las propiedades locales de la variedad en sí (ya que son todas equivalentes), sino a objetos o estructuras matemáticas definidas sobre la variedad (por ejemplo cuestiones acerca de la estructura local de los puntos críticos de diferentes tipos de funciones definidos en las variedades simplécticas, los modelos locales de acciones de grupos y un largo etcétera).

Un magnífico libro de texto sobre geometría simpléctica es [22], escrito por Dusa McDuff y Dietmar Salamon, que son dos expertos en la materia. En particular Dusa McDuff, que es catedrática en el Barnard College de la Universidad de Columbia en Estados Unidos, ha contribuido a cuestiones fundacionales de geometría simpléctica, como problemas de cómo rellenar variedades simplécticas con bolas (de modo técnico, problemas de *embeddings* simplécticos y problemas de empaquetamiento simpléctico); en [37] se comentan sus contribuciones. Hay además otros excelentes libros de texto sobre la materia, incluyendo el libro de Ana Cannas da Silva [4], que es también usado sobre todo como libro adecuado para seguir en un curso de máster o doctorado, y el libro de Helmut Hofer y Eduard Zehnder [18] que adopta un punto de vista más analítico.

#### AGRADECIMIENTOS

Agradezco al revisor las sugerencias para mejorar el artículo. Mi investigación está financiada por la Fundación BBVA con la ayuda a proyectos de investigación científica *From Integrability to Randomness in Symplectic and Quantum Geometry* y es un placer agradecer a la Fundación BBVA por su apoyo. Además agradezco a Antonio Díaz-Cano que leyese versiones preliminares de este artículo y me hiciese llegar correcciones y sugerencias útiles. Finalmente, gracias a Ana Pelayo por hacer las fotos del artículo, y a mis padres, Pedro y Maricruz, por leer el artículo y pasarme comentarios que lo han hecho más comprensible.

#### REFERENCIAS

- [1] V. I. ARNOL'D, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, Berlin and NY, 1978.
- [2] M. ATIYAH, Convexity and commuting Hamiltonians, *Bull. London Math. Soc.* **14** (1982), 1–15.
- [3] G. D. BIRKHOFF, Proof of Poincaré's geometric theorem, *Trans. Amer. Mat. Soc.* **14** (1913), 14–22.

- [4] A. CANNAS DA SILVA, *Lectures in symplectic geometry*, Springer, Berlin, 2000.
- [5] L. CHARLES, Á. PELAYO Y S. VŨ NGỌC, Isospectrality for quantum toric integrable systems, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **43** (2013), 815–849.
- [6] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. I. Le cas non intégrable, *Duke Math. J.* **46** (1979), 169–182.
- [7] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. II. Le cas intégrable, *Math. Z.* **171** (1980), 51–73.
- [8] C. C. CONLEY Y E. ZEHNDER, The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol'd, *Invent. Math.* **73** (1983) 33–49.
- [9] G. DARBOUX, Sur le problème de Pfaff, *Darb. Bull.* (2) **6** (1882), 14–36.
- [10] T. DELZANT, Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment, *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), 315–339.
- [11] Y. ELIASBERG, Rigidity of symplectic and contact structures, *Abstracts of reports to Seventh Leningrad International Topology Conference* (1982).
- [12] Y. ELIASBERG, A theorem on the structure of wave fronts and its applications in symplectic topology, *Funct. Anal. Appl.* **21** (1987), 227–232; original (en ruso) en *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **21** (1987), no. 3, 65–72.
- [13] C. GORDON, D. WEBB Y S. WOLPERT, Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, *Invent. Math.* **110** (1992), 1–22.
- [14] C. GORDON, D. WEBB Y S. WOLPERT, One cannot hear the shape of a drum, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **27** (1992), 134–138.
- [15] M. GROMOV, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), 307–347.
- [16] M. GROMOV, *Partial differential relations*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **9**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [17] V. GUILLEMIN Y S. STERNBERG, Convexity properties of the moment mapping, *Invent. Math.* **67** (1982), 491–513.
- [18] H. HOFER Y E. ZEHNDER, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhäuser, Basel (1994).
- [19] M. KAC, Can one hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly* **73** (1966) (4, part II), 1–23.
- [20] Y. LE FLOCH, Á. PELAYO Y S. VŨ NGỌC, Inverse spectral theory for semiclassical Jaynes-Cummings systems, *Math. Ann.* **364** (2016), 1393–1413. Corrección en *Math. Ann.* **375** (2019), 917–920.
- [21] Y. LE FLOCH Y S. VŨ NGỌC, The inverse spectral problem for quantum semitoric systems, *arXiv:2104.06704v3*.
- [22] D. McDUFF Y D. SALAMON, *Introduction to symplectic topology*, Sec. Ed., Oxf. Univ. Press, third edition, 2016.
- [23] J. M. MONTESINOS, *Classical tessellations and three-manifolds*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [24] J. M. MONTESINOS, Caleidoscopios en la Alhambra, *Mem. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Madrid, Ser. Cienc. Exactas* **23** (1987).

- [25] J. MOSER, Dynamical systems – Past and present, *Doc. Math.* Extra Vol. ICM Berlin 1998, Vol. I (1998), 381–402.
- [26] Á. PELAYO, Hamiltonian and symplectic symmetries: an introduction, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **54** (2017), 383–436.
- [27] Á. PELAYO, Symplectic invariants of semitoric systems and the inverse problem for quantum systems, *Indag. Math.* **32** (2021), 246–274.
- [28] Á. PELAYO, Symplectic and inverse spectral geometry of integrable systems: a glimpse and open problems, *Topology Appl.* **339** (2023), 108577.
- [29] Á. PELAYO Y F. REZAKHANLOU, The random Arnold conjecture: a new probabilistic Conley-Zehnder theory for symplectic maps, *arXiv:2306.15586*.
- [30] Á. PELAYO Y S. VŨ NGỌC, Semitoric integrable systems on symplectic 4-manifolds, *Invent. Math.* **177** (2009), 571–597.
- [31] Á. PELAYO Y S. VŨ NGỌC, Constructing integrable systems of semitoric type, *Acta Math.* **206** (2011), 93–125.
- [32] Á. PELAYO Y S. VŨ NGỌC, Hamiltonian dynamics and spectral theory for spin-oscillators, *Comm. Math. Phys.* **309** (2012), 123–154.
- [33] Á. PELAYO Y S. VŨ NGỌC, Semiclassical inverse spectral theory for singularities of focus-focus type, *Comm. Math. Phys.* **329** (2014), 809–820.
- [34] H. POINCARÉ, The value of science, *Popular Science Monthly* **96** (1906), 193–206.
- [35] H. POINCARÉ, Sur un théorème de géométrie, *Rend. Circ. Matem. Palermo* **33** (1912), 375–407.
- [36] F. SCHLENK, Symplectic embedding problems, old and new, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **55** (2018), 139–182.
- [37] F. SCHLENK, Dusa McDuff and symplectic geometry, *Notices Amer. Math. Soc.* **68** (2021), 346–356.
- [38] A. WEINSTEIN, Symplectic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **5** (1981), 1–13.
- [39] H. WEYL, *The classical groups. Their invariants and representations*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID Y REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

Correo electrónico: [alvpel01@ucm.es](mailto:alvpel01@ucm.es)

Página web: <https://blogs.mat.ucm.es/alvpel01/>