

Fractales de Riemann: números y figuras

por

Fernando Chamizo y Antonio Córdoba

LAS FIGURAS

Un lugar común de estos tiempos es la afirmación de que vivimos en la cultura de la imagen; otro insiste en el enorme impacto que el uso de los ordenadores tiene en nuestra vida cotidiana. Comenzamos este artículo presentando varios ejemplos de figuras que han sido obtenidas con la ayuda de un ordenador:

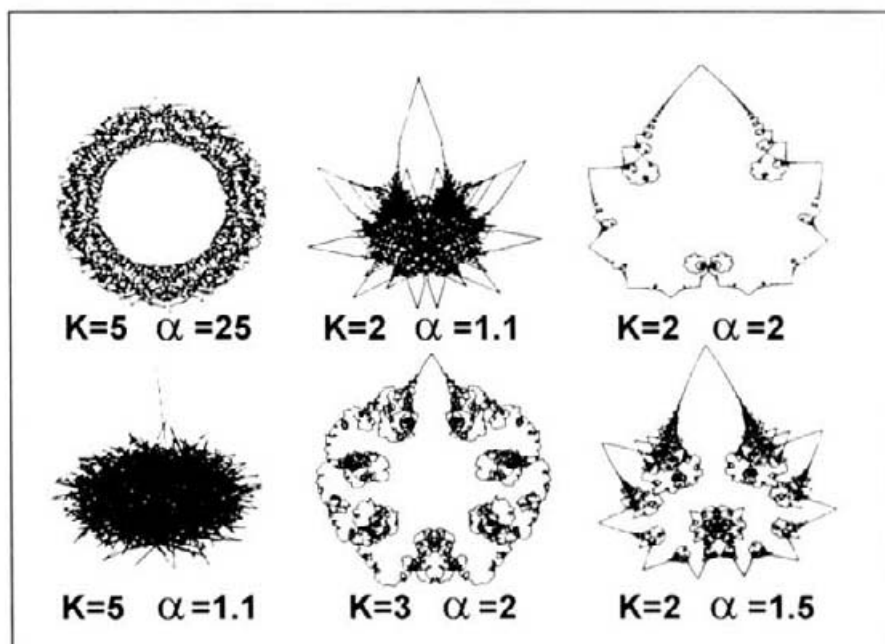


FIGURA 1

Dadas sus formas distintas, puede parecer extraño a simple vista que, sin embargo, representen curvas cerradas del plano dotadas de una expresión analítica relativamente simple y parecida:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \cos(2\pi n^k t), \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sin(2\pi n^k t)$$

donde $\alpha > 1$ y $k = 2, 3, 4, \dots$, $0 \leq t \leq 1$.

Los trazos “rectilíneos” que aparecen son, en realidad, un espejismo producido por las limitaciones del ordenador; por cuanto esas otras microestructuras que observamos en algunas de ellas, con aspecto de diablillos, se repiten a distintas escalas y son ubicuas en todo el dibujo.

Resulta también interesante plasmar las gráficas de las funciones coordenadas:

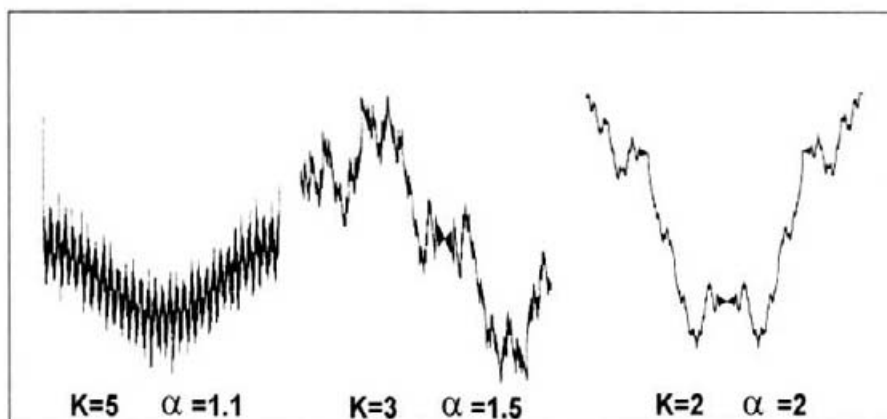


FIGURA 2

Estas curvas que nos sugieren los registros de un sismógrafo en presencia de un terremoto, o las fluctuaciones de la bolsa de valores, en tiempos agitados del mercado asiático, son notables ejemplos de fractales, cuyas propiedades hemos podido analizar en las referencias [1,2].

LA FUNCIÓN DE RIEMANN

La historia de nuestros dibujos se remonta, por lo menos, a mediados del siglo pasado.

Según Weierstrass [7], Riemann consideró las series (Weierstrass sólo cita $g_2(t)$, pero hoy sabemos que los conjuntos de diferenciabilidad de g_2 y f_2 coinciden)

$$g_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n^2 t)}{n^2}, \quad f_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n^2 t)}{n^2}$$

como buenos candidatos para ser funciones continuas que carecen de derivada en todos los puntos.

En la actualidad los conceptos de función, continuidad y derivabilidad están definidos con precisión y forman parte importante del currículum de

la enseñanza secundaria. Sin embargo ese no era el caso a comienzos del siglo XIX cuando, probablemente, la mayoría de los matemáticos creía que toda función continua había de tener derivadas salvo, quizás, en unos pocos lugares.

Incluso, Cauchy, a quién se acreditan las primeras definiciones precisas de continuidad, a veces suponía en sus demostraciones que las funciones continuas son también diferenciables. Si nos restringimos a las que vienen dadas por las expresiones analíticas habituales, no hay nada que objetar. Pero, a mediados del siglo pasado, ya había surgido la necesidad de tratar con funciones mucho más generales. En particular, el programa esbozado por Fourier en su *Tratado analítico de la propagación del calor*, exige que funciones “arbitrarias” puedan ser expresadas por medio de series trigonométricas, e impulsó el estudio de los aspectos más delicados en las nociones de continuidad, convergencia, derivación, integración y sus mutuas relaciones.

En un trabajo fundamental [6] B. Riemann intentó encontrar condiciones necesarias y suficientes que aseguren la recuperación de una función a partir de su serie de Fourier. En ese empeño tuvo que generalizar la noción de integral, obteniendo la ahora llamada integral de Riemann, que nos permite integrar funciones discontinuas siempre que el conjunto de puntos de discontinuidad sea pequeño o de medida cero. Generalizó también la noción de derivada, en el sentido que hoy denominamos débil, e inspiró a Cantor el estudio de la Teoría de Conjuntos y de los Cardinales Transfinitos. Impulsó también el análisis de las funciones “patológicas”.

Los primeros ejemplos conocidos de funciones continuas sin derivada en ningún punto se deben a Weierstrass [7] y responden a la fórmula siguiente:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \cos(2\pi\mu^n t)$$

Para ciertos valores de λ y μ .

Claramente estos ejemplos surgieron de los intentos de demostrar las conjeturas de Riemann sobre las funciones f_2 y g_2 .

En 1916 Hardy [4] confirmó parcialmente a Riemann y demostró que f_2 (resp. g_2) no es derivable en ningún punto t irracional y en varios tipos de racionales. Sin embargo, ya entrada la década de los sesenta de este siglo, J. Gerver encontró infinitos números racionales donde esa derivada existe. En concreto, Gerver [3] probó que f_2 y g_2 son derivables en el punto t si éste es un racional irreducible de la forma $t = a/q$, $q \equiv 2 \pmod{4}$.

Estamos ahora en condiciones de presentar unos resultados recientes [1, 2] en esta área tan clásica.

Definamos para cada valor de $k = 2, 3, 4, 5, \dots$ la función:

$$F_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n^k t}}{n^k} = \sum \frac{\cos(2\pi n^k t)}{n^k} + i \sum \frac{\sin(2\pi n^k t)}{n^k} = f_k(t) + i g_k(t)$$

Teorema 1 Sea a/q una fracción irreducible y consideremos la suma

$$S_k \left(\frac{a}{q} \right) = \sum_{n=1}^q e^{2\pi i n^k a/q}$$

Entonces la función F_k es derivable en a/q si y sólo si $S_k(a/q) = 0$. Además, en este caso, tenemos que:

$$F'_k \left(\frac{a}{q} \right) = \frac{-2\pi i}{q} \sum_{n=1}^q n e^{2\pi i n^k a/q}.$$

El caso particular $k = z$ nos recupera los resultados de Hardy y Gerver.

Corolario. F_2 es diferenciable en a/q , $\text{m.c.d.}(a, q) = 1$, si y sólo si $q \equiv 2 \pmod{4}$. Además, en ese caso, tenemos que

$$F'_2 \left(\frac{a}{q} \right) = -\pi i.$$

El Corolario se deduce del teorema usando que $S_2(a/q) = 0$ si y sólo si $q \equiv 2 \pmod{4}$ (véase §4) y que podemos escribir

$$F'_2 \left(\frac{a}{q} \right) = -\frac{2\pi i}{q} \left(\frac{q}{2} + \sum_{\substack{n \neq q \\ n \neq q/2}} n e^{2\pi i a n^2/q} \right)$$

donde la suma se anula ya que podemos agrupar sus sumandos de la manera siguiente:

$$n e^{2\pi i \frac{a}{q} n^2} + \left(\frac{q}{2} - n \right) e^{2\pi i \frac{a}{q} \left(\frac{q}{2} - n \right)^2} + \left(\frac{q}{2} + n \right) e^{2\pi i \frac{a}{q} \left(\frac{q}{2} + n \right)^2} + (q - n) e^{2\pi i \frac{a}{q} (q - n)^2} = 0,$$

para todo $n, 1 \leq n < q/2$.

El Teorema 1 convierte en objetivo deseable el conseguir condiciones sencillas sobre la fracción a/q , que sean equivalente a la anulación de las sumas $S_k(a/q)$. El lema siguiente es una respuesta adecuada.

Lema 2 a) Si a/q es una fracción irreducible y $q = p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}$ es la descomposición en factores primos del denominador. Tenemos que:

$$S_k \left(\frac{a}{q} \right) = 0 \text{ si y sólo si existe } j \text{ tal que } S_k \left(\frac{1}{p_j^{\gamma_j}} \right) = 0$$

b) Si p es un primo que no divide al entero k entonces:

$S_k(1/p^\gamma) = 0$ si y sólo si k es un divisor de $\gamma - 1$ y $\text{m.c.d.}(k, p - 1) = 1$.

Ejemplos de las aplicaciones de este lema son los siguientes: $k = 3$, $a/q = 1/3$ y $a/q = 3/5$. Que dan lugar a las gráficas:

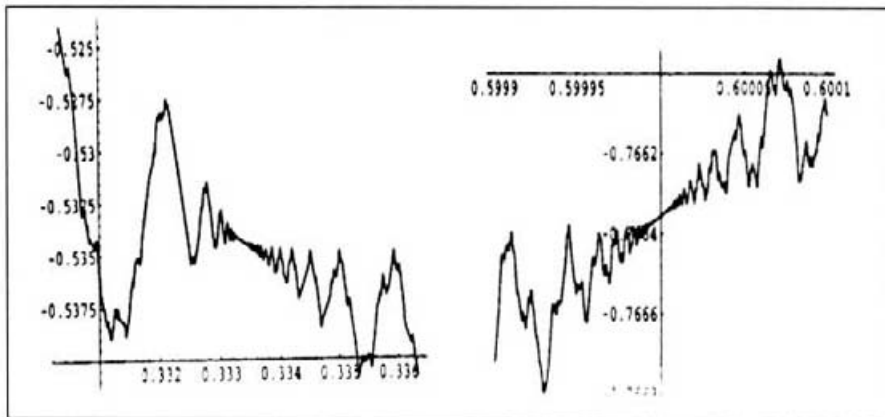


FIGURA 3

En estas figuras es posible comprobar cuán diferentes resultan ser los rangos de precisión que son necesarios para visualizar la diferenciabilidad en $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 3/5$, a pesar de ser dos racionales con denominadores muy próximos. Podemos observar también la complejidad de los grafos de $f_k = \text{Re}(F_k)$, $g_k = \text{Im}(F_k)$ que, cuando se magnifican convenientemente, revelan un comportamiento local-global que es bastante distinto.

CURVAS FRACTALES

Un aspecto digno de resaltar de la matemática de este siglo ha sido el interés generado en torno a las geometrías fractales. El estudio de los sistemas dinámicos caóticos y los modelos creados para entender los regímenes turbulentos en la Mecánica de los fluidos, han puesto de moda conceptos tales como el de atractor extraño, cascada de Feigenbaunn, conjunto de Mandelbrot, etc., que están emparentados con los clásicos conjuntos de

Cantor, la esponja de Sierpinski o las curvas de von Koch, en su común naturaleza fractal.

Existen en la literatura diversas nociones de dimensión. Para los propósitos de este artículo vamos a considerar la denominada dimensión por cajas o dimensión de Minkowski.

Dado Γ , un conjunto acotado del plano, consideremos, para todo número positivo ε , el conjunto Γ_ε de los puntos que distan de Γ menos que ε . En otras palabras, $\Gamma_\varepsilon = \bigcup_{x \in \Gamma} D(x; \varepsilon)$ es la unión de todos los discos de radio ε centrados en un punto del conjunto Γ . De forma un tanto pintoresca se llama a Γ_ε la salchicha de Minkowski de Γ .

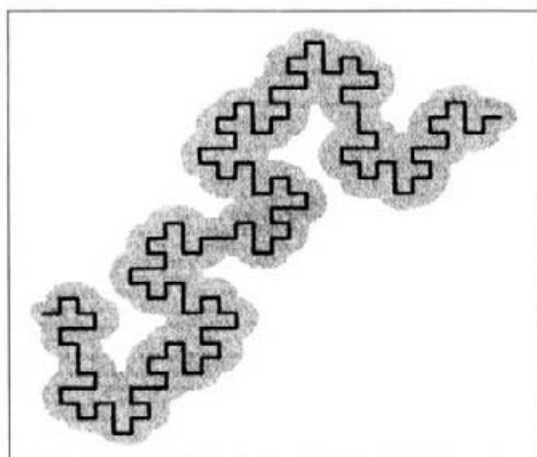


FIGURA 4

La manera en la que $A(\Gamma_\varepsilon)$, el área de Γ_ε , decae cuando ε tiende a cero, nos describe la complejidad de la geometría del conjunto Γ . Esta idea da lugar a los conceptos de dimensiones, superior e inferior, de Minkowski.

$$\overline{\dim}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \left[2 - \frac{\log A(\Gamma_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right]$$

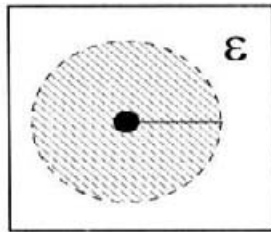
$$\underline{\dim}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left[2 - \frac{\log A(\Gamma_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \right]$$

Si ambos límites coinciden diremos que la dimensión de Γ es el valor común:

$$\dim(\Gamma) = \overline{\dim}(\Gamma) = \underline{\dim}(\Gamma).$$

Es un ejercicio sencillo y satisfactorio comprobar que cuando Γ es un solo punto, un segmento rectilíneo o un cuadrado, el concepto de dimensión que hemos introducido, les asigna, respectivamente, los valores 0, 1 y 2. Pero

nótese que nada impide que para otros conjuntos, llamados fractales, la dimensión sea fraccionaria.



$$A(\Gamma_\varepsilon) = \pi\varepsilon^2, \quad 2 - \frac{\log \pi\varepsilon^2}{\log \varepsilon} \rightarrow 0$$

FIGURA 5

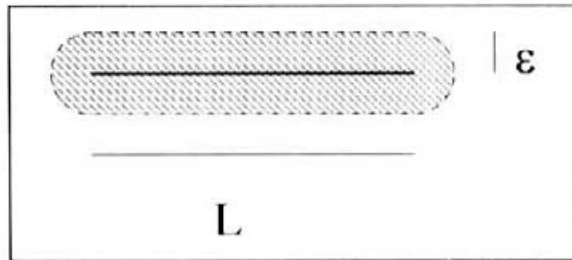


FIGURA 6

$$A(\Gamma_\varepsilon) = 2\pi\varepsilon L + \pi\varepsilon^2 \quad 2 - \frac{\log(2\pi\varepsilon L + \pi\varepsilon^2)}{\log \varepsilon} \rightarrow 1$$

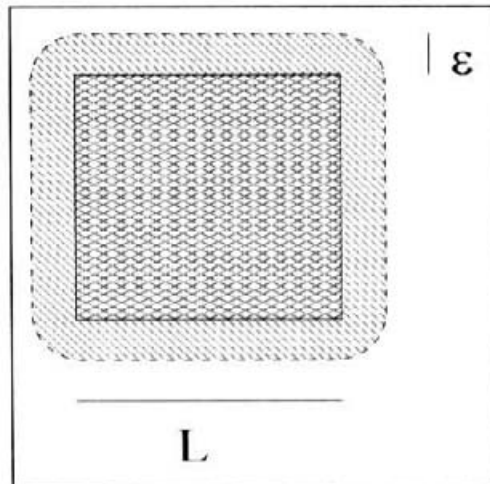


FIGURA 7

$$A(\Gamma_\varepsilon) = L^2 + 4L\varepsilon + \pi\varepsilon^2. \quad 2 - \frac{\log A(\Gamma_\varepsilon)}{\log \varepsilon} \rightarrow 2$$

Para hacer cálculos con la dimensión, es más conveniente sustituir los discos por cuadrados de lado ε . La salchicha de Minkowski se convierte entonces en la unión de todos los cuadrados que intersecan a Γ , entre los cuadrados de un retículo del plano. En esta formulación, calcular el área de Γ_ε se reduce a contar el número de cuadrados del retículo que cortan a Γ y multiplicar por ε^2 .

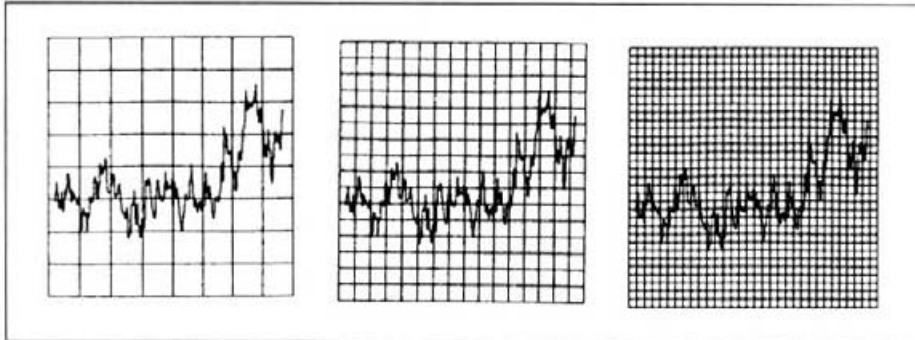


FIGURA 8

$M_\varepsilon(\Gamma)$ = número de cuadrados que cortan a Γ . Es fácil ver que

$$\dim(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\log M_\varepsilon(\Gamma)}{\log \varepsilon} \right|$$

En particular, si nuestro conjunto Γ resulta ser la gráfica de una función continua f definida en el intervalo $[0, 1]$ entonces, contar el número de cuadrados, equivale a medir la oscilación de la función en intervalos de tamaño $\varepsilon = 1/N$. En este caso obtenemos la formulación equivalente:

$$\dim(\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \left[N \sum_{k=1}^N \sup_{\frac{k-1}{N} \leq x, y \leq \frac{k}{N}} |f(x) - f(y)| \right]}{\log N}$$

cuando este límite existe.

Estamos en condiciones de presentar un interesante resultado nuevo acerca de las gráficas de la familia de funciones

$$F_{k,\alpha}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} e^{2\pi i n^k x} = f_{k,\alpha}(x) + i g_{k,\alpha}(x)$$

donde $\alpha > 1$, $k = 2, 3, 4, 5, \dots$

En lo sucesivo designaremos por $\Gamma_{k,\alpha}$ la gráfica de cualquiera de las dos funciones $f_{k,\alpha}$ ó $g_{k,\alpha}$ (partes real e imaginaria respectivamente de la función $F_{k,\alpha}$).

Teorema 2 Si $1 < \alpha \leq k + \frac{1}{2}$ tenemos que $\dim(\Gamma_{k,\alpha}) = 2 + \frac{1}{2k} - \frac{\alpha}{k}$.

De aquí se deduce que si $1 < \alpha < k + \frac{1}{2}$, las gráficas $\Gamma_{k,\alpha}$ no tienen dimensión entera, ésto es, son fractales, lo cual explica porqué su aspecto es tan diferente al de las gráficas (de dimensión uno) que estamos acostumbrados a ver.

HERRAMIENTAS: SUMAS TRIGONOMÉTRICAS DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS

Los resultados anteriores se encuentran ubicados en la interfase entre el Análisis Armónico y la Teoría de los Números. El estudio de las funciones periódicas nos lleva a las sumas trigonométricas $\sum c_n e^{2\pi i n t}$, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una fundamental. Por tanto, no debe resultar sorprendente que algunos resultados aritméticos desempeñen un papel importante en muchos ejemplos y teoremas del Análisis.

Esta relación es también muy ostensible desde el punto de vista histórico y Hardy y Littlewood pueden ser considerados, al mismo tiempo, como los fundadores de una parte substancial del Análisis Armónico y de la Teoría de los Números.

Uno de los resultados más útiles para transformar y evaluar sumas trigonométricas es la fórmula de sumación de Poisson.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \text{ donde } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx.$$

Dos importantes aplicaciones (no directas) de ella, son:

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i \frac{n^2}{N}} = \cos\left(\frac{\pi N}{4}\right) e^{\pi i(1-N)/4} \sqrt{2N}$$

y

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n^2 x} \right| < C \left(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{q} \right)$$

para $|x - p/q| < 1/q^2$, donde C es cierta constante.

Este tipo de resultados son precisos debido a que \hat{f} deja casi invariante a $e^{2\pi i x^2}$. Sin embargo éste no es el caso en las llamadas sumas de Weyl

$$W_N = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n^k x} \quad k \geq 3.$$

Cuyo nombre se debe a una famosa aplicación que hizo de ellas H. Weyl en 1914. Esencialmente probó que si x es irracional la probabilidad de que la

parte fraccionaria de $n^k x$ pertenezca a un intervalo $(a, b) \subset [0, 1)$ es proporcional a $b - a$. Para ello redujo el problema a demostrar $\lim_{N \rightarrow +\infty} |W_N|/N = 0$ y probó esta última aserción subdividiendo la suma en otras de menor longitud y elevando al cuadrado para que aparecieran incrementos de las frecuencias $(n+h)^k - n^k = hn^{k-1} + \dots$, lo cual reduce, en algún sentido, el exponente k .

Durante este siglo se completó este método aplicándolo a sumas trigonométricas de la forma $\sum e^{2\pi i f(n)}$ en las que la oscilación se reduce repitiendo varias veces los pasos de Weyl, hasta poder aplicar la fórmula de sumación de Poisson como en el caso cuadrático.

En nuestro trabajo [2], las acotaciones de Weyl para W_N se utilizan para obtener estimaciones acerca del incremento de F_k cerca de un valor x_0 en términos de su aproximación por racionales. Para puntos racionales, la periodicidad implica con la notación del Teorema 1.

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n^k a/q} - \frac{N}{q} S_k \left(\frac{a}{q} \right) \right| < q$$

y, por tanto, si $S_k \left(\frac{a}{q} \right) = 0$ la suma de Weyl en a/q está acotada independientemente de N , lo que asegura una gran cancelación. Un estudio preciso acerca de cómo se extiende esta cancelación a un pequeño entorno de a/q permite probar la derivabilidad en este punto.

Dentro de las técnicas que involucran sumas trigonométricas, una de las que mejor refleja la interrelación entre el Análisis y la Aritmética es el llamado “método del círculo”, que permite reducir algunos problemas aditivos a estimaciones de sumas trigonométricas. Una de las aplicaciones más notables se debe a I.M. Vinogradov, quien probó en 1937 que todo número impar suficientemente grande se puede escribir como suma de tres primos. Para ello tuvo que encontrar una estimación no trivial de

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i p x}$$

donde p recorre los primos. Al tratar esta suma, Vinogradov aplicó primero un proceso de criba transformado la sumación sobre primos en muchas sumas sobre enteros con coeficientes sólo controlables en promedio; y después probó, sin estimar ninguna de estas sumas, que todas ellas no podían ser simultáneamente grandes, obteniendo la estimación no trivial deseada. Esta segunda idea fue recogida décadas después en la llamada “desigualdad

de gran criba", cuyo ejemplo más significativo afirma que si $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq 1$ con $x_{j+i} - x_j \geq \delta$ y $x_1 \geq \delta$, entonces

$$\sum_{x_j} \left| \sum_{n \leq N} a_n e^{2\pi i n x_j} \right|^2 \leq (N + \delta^{-1}) \sum_{n \leq N} |a_n|^2$$

para $a_n \in \mathbf{C}$ cualesquiera.

En nuestra prueba del Teorema 2 aplicamos esta desigualdad a la fórmula para la dimensión de $\Gamma_{k,\alpha}$. Los valores de x_j serán ahora los de x e y en los que el supremo se alcanza, con ella obtenemos $\dim(\Gamma_{k,\alpha}) \leq 2 + \frac{1}{2k} - \frac{\alpha}{k}$; mientras que la desigualdad contraria se consigue comparando la suma con una integral de la forma $\int |f(x) - f(x + 1/N)| dx$.

Como en la desigualdad de gran criba los coeficientes son arbitrarios, se puede deducir, con argumentos similares, que todas las funciones de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} e^{2\pi i n^k x} \text{ con } 0 < c_1 \leq a_n \leq c_2$$

son fractales de la misma dimensión, para cada $1 < \alpha \leq k + 1/2$; esto es, en algún sentido, son las frecuencias n^k las únicas causantes de que la dimensión sea fraccionaria.

Referencias

- [1] CHAMIZO, F. Y CÓRDOBA, A. The fractal dimension of a family of Riemann's graphs. *C.R. Acad. Sci. Paris Série I* **317**.(1993), 455-460. (Erratum: *C.R. Acad. Sci. Paris Série I* **320**. (1994), 649-650.
- [2] CHAMIZO, F. Y CÓRDOBA, A. *Differentiability and dimensions of some fractal Fourier Series*. En prensa, *Advances of Math*
- [3] GERVER, J. The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π . *Amer. J. Math.* **92**. (1970), 33-55
- [4] HARDY, G. H. Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.* **17**. (1916), 301-325.
- [5] HARDY, G. H. Y LITTLEWOOD, J. E. Some problems in diophantine approximation. *Acta Mathematica.* **37** (1914), 194-238.
- [6] RIEMANN, B. Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Habilitation 1854, *Math. Werke* **230**
- [7] WEIERSTRASS, K. Über continuierliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differential-quotienten beritzen. *Math. Werke II, Mayor U. Müller Berlin* (1895), 194-238