Preguntas en busca de respuesta

Sección a cargo de

Antonio Sánchez Calle

El problema del círculo

por

Fernando Chamizo

Consideremos la función $r(n)$ que cuenta el número de formas en que se puede escribir n como suma de dos cuadrados, esto es,

$$r(n) = \sharp\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b^2 = n\} .$$

Por ejemplo, $r(5) = 8$ porque $5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2$ y $r(6) = 0$ (véase en [1], una "fórmula" para calcular $r(n)$).

Como tantas otras funciones relevantes en Teoría de Números, $r(n)$ tiene un comportamiento bastante errático y, sin embargo, manifiesta cierta regularidad en promedio, concretamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} = \pi \qquad \text{donde } R(x) = \sum_{n<x} r(n) .$$

Es decir, para x grande, la función $R(x)$ está aproximada por πx en el sentido de que el error relativo tiende a cero (se suele escribir $R(x) \sim \pi x$). El problema del círculo trata acerca del término de error en esta aproximación; su enunciado preciso es el siguiente:

$$\textit{Demostrar que } \lim_{x\to+\infty} \frac{R(x) - \pi x}{x^\alpha} = 0 \textit{ para todo } \alpha > 1/4 .$$

Siendo un problema clásico, quizá esta formulación parece demasiado técnica, y el papel desempeñado por el número π al aproximar $R(x)$ un tanto misterioso; pero observando que $r(n)$ cuenta el número de puntos de $\mathbb{Z}^2$ en la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{n})^2$, se deduce que $R(x) - \pi x$ es el error cometido al aproximar el número de puntos de coordenadas enteras en el interior del círculo centrado en cero de radio $\sqrt{x}$ por su área, πx. Así pues, el problema del círculo consiste en demostrar que dicho error es, en valor absoluto, menor que $C_\alpha\ x^\alpha$ para todo $\alpha > 1/4$ (con C_α constante para cada α).

Con esta formulación, que da nombre al problema, no es difícil demostrar que, como hay $Cx^{1/2}$ puntos "alrededor" de la frontera del círculo, el límite que aparece en el problema es cero para $\alpha > 1/2$. Esta observación constituye un resultado auxiliar en un trabajo de Gauss [2], y por ello se habla, a veces, del "problema del círculo de Gauss", sin embargo los primeros resultados no triviales son de principios de este siglo y el enunciado preciso del problema se debe a G.H. Hardy [4] en 1916, quien también probó que $\alpha > 1/4$ es el rango natural, de hecho

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1/4}} \left(\frac{1}{x} \int_1^x (R(t) - \pi t)^2\, dt \right)^{1/2} = \text{cte.} \neq 0.$$

A lo largo de este siglo se ha estudiado el problema del círculo y, en general, la distribución de puntos del retículo en otras regiones, por medio de sumas trigonométricas (véase [7]). Por ejemplo, se puede demostrar [5] que resolver el problema del círculo para $\alpha > \alpha_0$ es equivalente a probar

$$\lim_{x\to+\infty}\ x^{1/4-\alpha} \sum \sum_{0\neq n^2+m^2\leq x^{1-2\alpha_0}} \frac{\cos(2\pi\sqrt{(n^2+m^2)x} + \pi/4)}{(n^2+m^2)^{3/4}} = 0.$$

La estimación trivial $|\cos\phi| \leq 1$ implica que se puede tomar $\alpha_0 = 1/3$ (un resultado que ya probó W. Sierpiński en 1906 con otros métodos), y hasta finales de los 80 se ha reducido este valor de α_0 estudiando la cancelación en una o dos variables en el sumatorio anterior por métodos llamados "de van der Corput" (véase [3]).

En los últimos años se ha desarrollado un nuevo método (llamado por algunos autores "método discreto de Hardy-Littlewood") que, estimando ciertas sumas trigonométricas, ha permitido a M.N. Huxley [6] resolver el problema del círculo para $\alpha > 23/73$. Sin embargo, una solución completa del problema parece estar todavía muy lejos.

Bibliografía

[1] CILLERUELO, J., CÓRDOBA, A.: *La Teoría de los Números*, Ed. Mondadori, Madrid, 1992.

[2] GAUSS, C. F.: *De nexu inter multitudinem classium in quas formae binariae secundi gradus distribuntur, eaurumque determinatem*, Werke Band 2, 1834, 269-303.

[3] GRAHAM, S. W., KOLESNIK, G.: *Van der Corput's Method of Exponential Sums*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, 126, Cambridge University Press, 1991.

[4] HARDY, G. H.: *The average of the functions* $P(x)$ *and* $\Delta(x)$, Proc. London Math. Soc. (2), 15, 1916, 192-213

[5] HARDY, G. H.: *The lattice points of a circle*, Proc. Roy. Soc. London (A), 107, 1925, 623-635

[6] HUXLEY, M. N.: *Exponential sums and lattice points* II, Proc. London Math. Soc. (3), 66, 1993, 279-301

[7] KRÄTZEL, E.: *Lattice Points*, Kluwer, Dordrecht, 1988

F. Chamizo, Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid
e-mail: `fernando.chamizo@uam.es`