

## PREGUNTAS EN BUSCA DE RESPUESTA

Sección a cargo de

Antonio Sánchez Calle

### El problema del círculo

por

Fernando Chamizo

Consideremos la función  $r(n)$  que cuenta el número de formas en que se puede escribir  $n$  como suma de dos cuadrados, esto es,

$$r(n) = \#\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b^2 = n\}.$$

Por ejemplo,  $r(5) = 8$  porque  $5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2$  y  $r(6) = 0$  (véase en [1], una “fórmula” para calcular  $r(n)$ ).

Como tantas otras funciones relevantes en Teoría de Números,  $r(n)$  tiene un comportamiento bastante errático y, sin embargo, manifiesta cierta regularidad en promedio, concretamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = \pi \quad \text{donde } R(x) = \sum_{n < x} r(n).$$

Es decir, para  $x$  grande, la función  $R(x)$  está aproximada por  $\pi x$  en el sentido de que el error relativo tiende a cero (se suele escribir  $R(x) \sim \pi x$ ). El problema del círculo trata acerca del término de error en esta aproximación; su enunciado preciso es el siguiente:

$$\text{Demostrar que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x) - \pi x}{x^\alpha} = 0 \text{ para todo } \alpha > 1/4.$$

Siendo un problema clásico, quizá esta formulación parece demasiado técnica, y el papel desempeñado por el número  $\pi$  al aproximar  $R(x)$  un tanto misterioso; pero observando que  $r(n)$  cuenta el número de puntos de  $\mathbb{Z}^2$  en la circunferencia  $x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{n})^2$ , se deduce que  $R(x) - \pi x$  es el error cometido al aproximar el número de puntos de coordenadas enteras en el interior del círculo centrado en cero de radio  $\sqrt{x}$  por su área,  $\pi x$ . Así pues, el problema

del círculo consiste en demostrar que dicho error es, en valor absoluto, menor que  $C_\alpha x^\alpha$  para todo  $\alpha > 1/4$  (con  $C_\alpha$  constante para cada  $\alpha$ ).

Con esta formulación, que da nombre al problema, no es difícil demostrar que, como hay  $Cx^{1/2}$  puntos “alrededor” de la frontera del círculo, el límite que aparece en el problema es cero para  $\alpha > 1/2$ . Esta observación constituye un resultado auxiliar en un trabajo de Gauss [2], y por ello se habla, a veces, del “problema del círculo de Gauss”, sin embargo los primeros resultados no triviales son de principios de este siglo y el enunciado preciso del problema se debe a G.H. Hardy [4] en 1916, quien también probó que  $\alpha > 1/4$  es el rango natural, de hecho

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/4}} \left( \frac{1}{x} \int_1^x (R(t) - \pi t)^2 dt \right)^{1/2} = \text{cte.} \neq 0.$$

A lo largo de este siglo se ha estudiado el problema del círculo y, en general, la distribución de puntos del retículo en otras regiones, por medio de sumas trigonométricas (véase [7]). Por ejemplo, se puede demostrar [5] que resolver el problema del círculo para  $\alpha > \alpha_0$  es equivalente a probar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/4-\alpha} \sum_{0 \neq n^2+m^2 \leq x^{1-2\alpha_0}} \frac{\cos(2\pi\sqrt{(n^2+m^2)x} + \pi/4)}{(n^2+m^2)^{3/4}} = 0.$$

La estimación trivial  $|\cos \phi| \leq 1$  implica que se puede tomar  $\alpha_0 = 1/3$  (un resultado que ya probó W. Sierpiński en 1906 con otros métodos), y hasta finales de los 80 se ha reducido este valor de  $\alpha_0$  estudiando la cancelación en una o dos variables en el sumatorio anterior por métodos llamados “de van der Corput” (véase [3]).

En los últimos años se ha desarrollado un nuevo método (llamado por algunos autores “método discreto de Hardy-Littlewood”) que, estimando ciertas sumas trigonométricas, ha permitido a M.N. Huxley [6] resolver el problema del círculo para  $\alpha > 23/73$ . Sin embargo, una solución completa del problema parece estar todavía muy lejos.

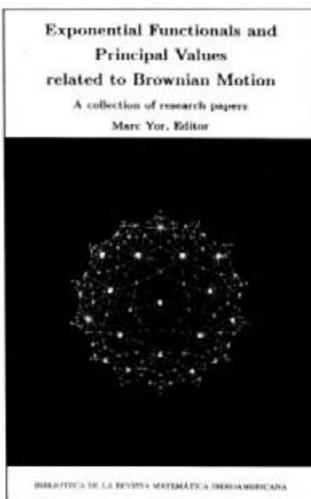
## Bibliografía

- [1] CILLERUELO, J., CÓRDOBA, A.: *La Teoría de los Números*, Ed. Mondadori, Madrid, 1992.
- [2] GAUSS, C. F.: *De nexu inter multitudinem classium in quas formae binariae secundi gradus distribuntur, eaurumque determinatem*, Werke Band 2, 1834, 269-303.
- [3] GRAHAM, S. W., KOLESNIK, G.: *Van der Corput's Method of Exponential Sums*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, 126, Cambridge University Press, 1991.

- [4] HARDY, G. H.: *The average of the functions  $P(x)$  and  $\Delta(x)$* , Proc. London Math. Soc. (2), 15, 1916, 192-213
- [5] HARDY, G. H.: *The lattice points of a circle*, Proc. Roy. Soc. London (A), 107, 1925, 623-635
- [6] HUXLEY, M. N.: *Exponential sums and lattice points II*, Proc. London Math. Soc. (3), 66, 1993, 279-301
- [7] KRÄTZEL, E.: *Lattice Points*, Kluwer, Dordrecht, 1988

F. Chamizo, Departamento de Matemáticas  
 Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid  
 e-mail: fernando.chamizo@uam.es

### BIBLIOTECA DE LA REVISTA MATEMÁTICA IBEROAMERICANA



#### Exponential Functionals and Principal Values related to Brownian Motion 1997

Marc YOR, editor

##### Part A. Exponential functionals.

Sur l'identité de Bougerol pour les fonctionnelles du mouvement brownien avec drift.

An explanation of a generalized Bougerol's identity in terms of hyperbolic Brownian motion.

Windings of hyperbolic Brownian motion. On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes.

##### Part B. Principal values.

On some hyperbolic principal values of Brownian local times.

Une identité en loi remarquable pour l'excursion brownienne normalisée.

Some applications of Lévy's area formula to pseudo-Brownian and pseudo-Bessel bridges.

An iterated logarithm law for Cauchy's principal value of Brownian local times.

On principal values of perturbed Brownian motion.

Otra publicación de la Revista Matemática Iberoamericana

Henrik IWANIEC: **Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms**

**Precio:** YOR, rústica: \$50.

IWANIEC, rústica: \$40, encuadernado: \$55.

**Pedidos:** Biblioteca de Revista Matemática Iberoamericana Dpto. de Matemáticas  
 Universidad Autónoma de Madrid 28049 MADRID, ESPAÑA.