

PREGUNTAS EN BUSCA DE RESPUESTA

Sección a cargo de

Antonio Sánchez Calle

El problema del círculo

por

Fernando Chamizo

Consideremos la función $r(n)$ que cuenta el número de formas en que se puede escribir n como suma de dos cuadrados, esto es,

$$r(n) = \#\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b^2 = n\}.$$

Por ejemplo, $r(5) = 8$ porque $5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2$ y $r(6) = 0$ (véase en [1], una “fórmula” para calcular $r(n)$).

Como tantas otras funciones relevantes en Teoría de Números, $r(n)$ tiene un comportamiento bastante errático y, sin embargo, manifiesta cierta regularidad en promedio, concretamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{x} = \pi \quad \text{donde } R(x) = \sum_{n < x} r(n).$$

Es decir, para x grande, la función $R(x)$ está aproximada por πx en el sentido de que el error relativo tiende a cero (se suele escribir $R(x) \sim \pi x$). El problema del círculo trata acerca del término de error en esta aproximación; su enunciado preciso es el siguiente:

$$\text{Demostrar que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x) - \pi x}{x^\alpha} = 0 \text{ para todo } \alpha > 1/4.$$

Siendo un problema clásico, quizá esta formulación parece demasiado técnica, y el papel desempeñado por el número π al aproximar $R(x)$ un tanto misterioso; pero observando que $r(n)$ cuenta el número de puntos de \mathbb{Z}^2 en la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{n})^2$, se deduce que $R(x) - \pi x$ es el error cometido al aproximar el número de puntos de coordenadas enteras en el interior del círculo centrado en cero de radio \sqrt{x} por su área, πx . Así pues, el problema

del círculo consiste en demostrar que dicho error es, en valor absoluto, menor que $C_\alpha x^\alpha$ para todo $\alpha > 1/4$ (con C_α constante para cada α).

Con esta formulación, que da nombre al problema, no es difícil demostrar que, como hay $Cx^{1/2}$ puntos “alrededor” de la frontera del círculo, el límite que aparece en el problema es cero para $\alpha > 1/2$. Esta observación constituye un resultado auxiliar en un trabajo de Gauss [2], y por ello se habla, a veces, del “problema del círculo de Gauss”, sin embargo los primeros resultados no triviales son de principios de este siglo y el enunciado preciso del problema se debe a G.H. Hardy [4] en 1916, quien también probó que $\alpha > 1/4$ es el rango natural, de hecho

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/4}} \left(\frac{1}{x} \int_1^x (R(t) - \pi t)^2 dt \right)^{1/2} = \text{cte.} \neq 0.$$

A lo largo de este siglo se ha estudiado el problema del círculo y, en general, la distribución de puntos del retículo en otras regiones, por medio de sumas trigonométricas (véase [7]). Por ejemplo, se puede demostrar [5] que resolver el problema del círculo para $\alpha > \alpha_0$ es equivalente a probar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/4-\alpha} \sum_{0 \neq n^2+m^2 \leq x^{1-2\alpha_0}} \frac{\cos(2\pi\sqrt{(n^2+m^2)x} + \pi/4)}{(n^2+m^2)^{3/4}} = 0.$$

La estimación trivial $|\cos \phi| \leq 1$ implica que se puede tomar $\alpha_0 = 1/3$ (un resultado que ya probó W. Sierpiński en 1906 con otros métodos), y hasta finales de los 80 se ha reducido este valor de α_0 estudiando la cancelación en una o dos variables en el sumatorio anterior por métodos llamados “de van der Corput” (véase [3]).

En los últimos años se ha desarrollado un nuevo método (llamado por algunos autores “método discreto de Hardy-Littlewood”) que, estimando ciertas sumas trigonométricas, ha permitido a M.N. Huxley [6] resolver el problema del círculo para $\alpha > 23/73$. Sin embargo, una solución completa del problema parece estar todavía muy lejos.

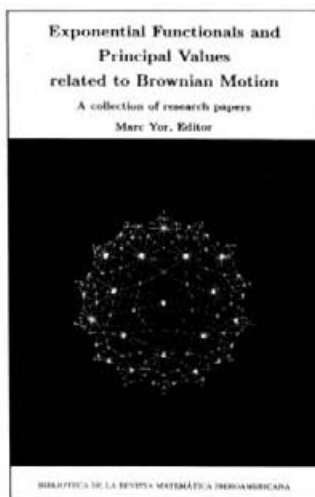
Bibliografía

- [1] CILLERUELO, J., CÓRDOBA, A.: *La Teoría de los Números*, Ed. Mondadori, Madrid, 1992.
- [2] GAUSS, C. F.: *De nexu inter multitudinem classium in quas formae binariae secundi gradus distribuntur, eaurumque determinatem*, Werke Band 2, 1834, 269-303.
- [3] GRAHAM, S. W., KOLESNIK, G.: *Van der Corput's Method of Exponential Sums*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, 126, Cambridge University Press, 1991.

- [4] HARDY, G. H.: *The average of the functions $P(x)$ and $\Delta(x)$* , Proc. London Math. Soc. (2), 15, 1916, 192-213
- [5] HARDY, G. H.: *The lattice points of a circle*, Proc. Roy. Soc. London (A), 107, 1925, 623-635
- [6] HUXLEY, M. N.: *Exponential sums and lattice points II*, Proc. London Math. Soc. (3), 66, 1993, 279-301
- [7] KRÄTZEL, E.: *Lattice Points*, Kluwer, Dordrecht, 1988

F. Chamizo, Departamento de Matemáticas
 Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid
 e-mail: fernando.chamizo@uam.es

BIBLIOTECA DE LA REVISTA MATEMÁTICA IBEROAMERICANA



Exponential Functionals and Principal Values related to Brownian Motion 1997

Marc YOR, editor

Part A. Exponential functionals.

Sur l'identité de Bougerol pour les fonctionnelles du mouvement brownien avec drift.

An explanation of a generalized Bougerol's identity in terms of hyperbolic Brownian motion.

Windings of hyperbolic Brownian motion. On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes.

Part B. Principal values.

On some hyperbolic principal values of Brownian local times.

Une identité en loi remarquable pour l'excursion brownienne normalisée.

Some applications of Lévy's area formula to pseudo-Brownian and pseudo-Bessel bridges.

An iterated logarithm law for Cauchy's principal value of Brownian local times.

On principal values of perturbed Brownian motion.

Otra publicación de la Revista Matemática Iberoamericana

Henrik IWANIEC: **Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms**

Precio: YOR, rústica: \$50.

IWANIEC, rústica: \$40, encuadernado: \$55.

Pedidos: Biblioteca de Revista Matemática Iberoamericana Dpto. de Matemáticas
 Universidad Autónoma de Madrid 28049 MADRID, ESPAÑA.