Operadores integrales de Fourier, teoría espectral y sistemas hamiltonianos*

por

Álvaro Pelayo†

Resumen. El matemático holandés Johannes (Hans) J. Duistermaat (1942–2010) ha jugado un papel crítico en el desarrollo de un gran número de temas en análisis, geometría y teoría de Lie. En la primera parte de este artículo comentamos, de forma breve, algunas de sus contribuciones más importantes, describiendo el contexto histórico en que tuvieron lugar. En la segunda parte describimos brevemente sus contribuciones más recientes a la teoría de acciones de toros sobre variedades simplécticas, dando además una introducción a los conceptos básicos de la geometría simpléctica. Dedicamos este artículo a la memoria de Hans Duistermaat.

1. Introducción

En marzo del año 2010, la comunidad internacional se despedía de forma repentina de Johannes (Hans) J. Duistermaat (1942–2010), venerado como una autoridad mundial en análisis matemático y uno de los matemáticos holandeses más originales del siglo XX. Un gigante matemático con conocimientos universales cuyas contribuciones han tenido un marcado impacto en las actuales corrientes de investigación, habiendo servido como inspiración a muchos trabajos de eminentes matemáticos, entre ellos Michael Atiyah, Raoul Bott, Jean-Michel Bismut, Victor Guillemin, Alan Weinstein o Edward Witten. Duistermaat disfrutaba de un reconocimiento monumental en la comunidad científica internacional, y está considerado uno de los matemáticos más brillantes que ha trabajado en las áreas de análisis geométrico y ecuaciones diferenciales en el siglo XX.

Hans Duistermaat ha desempeñado un papel crítico en el desarrollo de varias ramas del análisis matemático, la geometría diferencial y teoría de Lie. Su primera contribución brillante fue el artículo con Hörmander «Fourier integral operators. II», publicado en *Acta Mathematica* [13]. Hans Duistermaat escribió este artículo en 1970, poco después de realizar su tesis doctoral. Numerosos resultados de Duistermaat

*Partes de este texto están basadas en el artículo [22], escrito con Victor Guillemin, San S. Vũ Ngọc y Alan Weinstein.

†El autor está parcialmente financiado por la NSF Postdoctoral Fellowship DMS-0703601, NSF Grant DMS-0965738 y una Oberwolfach Leibniz Fellowship. Quiere además mostrar su agradecimiento al Mathematical Sciences Research Institute en Berkeley por su hospitalidad durante el año académico 2009–2010, y al Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach por su hospitalidad durante parte del verano de 2010.

han tenido una influencia profunda en geometría diferencial, mecánica y análisis, incluidos varios de mis artículos [25, 26, 27]. Resultados que hoy consideramos como clásicos llevan el nombre de Duistermaat, por ejemplo la fórmula de la traza de Duistermaat-Guillemin (1975), el teorema de Duistermaat de existencia global de variables acción-ángulo (1980), la fórmula de Duistermaat-Heckman en geometría simpléctica (1982) y el teorema biespectral de Duistermaat-Grünbaum (1986).

Los trabajos de Duistermaat incorporan numerosas ideas originales, a la vez que dejan patente su conocimiento de los métodos y herramientas teóricas más difíciles. En este artículo comenzaré describiendo algunas de las contribuciones matemáticas más importantes, desde mi punto de vista, de Duistermaat, así como el contexto histórico y social en que se enmarcaron. Después daré algunos detalles sobre sus contribuciones más recientes a la teoría de acciones de grupos de Lie sobre variedades simplécticas, trabajo que desarrollamos en colaboración durante los últimos años. La intención es que el artículo sea accesible a matemáticos de áreas diversas.

2. Operadores integrales de Fourier y teoría de Maslov

Hans Duistermaat recibió el doctorado en matemáticas por la Universidad de Utrecht en 1968. Aunque Hans Freudenthal era su supervisor oficial, su tesis fue dirigida por Günther K. Braun, que falleció un año antes de que la defendiese. Tras la tesis, tuvo la acertada intuición de sumergirse en el estudio del trabajo del gran matemático Hörmander sobre una nueva técnica para estudiar ecuaciones lineales en derivadas parciales: los operadores integrales de Fourier. Dichos operadores integrales son una generalización muy importante de los operadores en derivadas parciales.

Después de leer ciertas partes de los trabajos de Hörmander, Hans decidió aceptar una posición postdoctoral en Lund (Suecia), donde Hörmander impartía clases, para así poder aprenderlos de primera mano. Durante un año, Hörmander impartió un curso sobre su nueva teoría a un pequeño grupo de matemáticos. En la audiencia se sentaba un joven matemático, por aquel entonces desconocido, de nombre Hans Duistermaat. Pero Duistermaat estaba lejos, pero que muy lejos, de ser un miembro más de la audiencia.

Como muy poca gente en el mundo, Duistermaat ya tenía a los treinta años de edad una compresión y un conocimiento extraordinario sobre los trabajos del matemático noruego Sophus Lie, que generalmente se enmarcan en la rama de las matemáticas ahora conocida como *teoría de Lie*. La teoría de Lie es una rama fundamental de la geometría, que ha tenido una importancia primordial en el desarrollo de muchas ideas en matemáticas puras y aplicadas, y en el desarrollo de la física.

El conocimiento que Hans tenía sobre teoría de Lie le permitió contribuir de una forma esencial al desarrollo de la teoría global de operadores integrales de Fourier. Este fue, sin duda, su primer golpe de brillantez: cuando regresó a Holanda en 1970, Hans dedicó toda su energía a explorar, y comprender, las aplicaciones de la teoría de operadores integrales de Fourier. Después de varios meses de trabajo intenso, Hans empezó a enviar a Hörmander manuscritos que contenían el resultado de sus investigaciones. Tras varios meses en los que Hans no obtuvo ninguna respuesta, un buen día le llegó una carta de Hörmander que decía: «ahora entiendo lo que dices; te enviaré un artículo muy pronto». Hans recibió poco después el artículo prometido por Hörmander, de título «Fourier integral operators. II». Con su modestia usual, Hans dijo «reconocer», aquí y allá, sus contribuciones en el texto que Hörmander había preparado.

En su trabajo con Hörmander, Duistermaat acaba de revelarse a la comunidad matemática internacional como un pionero en el campo del análisis microlocal. Este trabajo [13], que fue publicado en la revista *Acta Mathematica* en 1972, es uno de los referentes fundamentales en este campo de las matemáticas. Hans continuó escribiendo sobre este tema en sus notas de Nijmegen y del Instituto Courant en Nueva York [7].

Hans Duistermaat. Foto tomada por J. W. H. Kolk en 1977 en la fiesta de graduación de J. A. C. Kolk, uno de los estudiantes de doctorado de Duistermaat.

Hans presenció por primera vez, durante su estancia en Lund, la diferencia de puntos de vista que sobre la teoría de Maslov tenían Hörmander y Leray, que pertenecían a dos escuelas distintas de pensamiento. Este último había comprendido el significado del *WKB ansatz* en términos de distribuciones lagrangianas, pero la forma intuitiva en que afrontó el problema (por ejemplo, la teoría espectral del átomo de helio) era, al menos para los matemáticos, difícil de comprender. Hörmander, en el espíritu Bourbaki, quería una teoría clara y rigurosa que no hiciese referencia a la física. En Francia, por el contrario, Leray estaba muy interesado en la visión y métodos de Maslov.

A pesar de su juventud, Hans contempló, y estuvo abierto, a ambos puntos de vista. Lo que es aún mejor, su extraordinaria capacidad para comprender ideas complejas le permitió entender rápidamente las contribuciones de las dos partes, y hacer contribuciones a ambas escuelas de pensamiento.

Sólo dos años después de su artículo seminal con Hörmander, Duistermaat publicó otro artículo sobre integrales oscilatorias [5] que se ha convertido en un pilar básico, en el que la formulación de Maslov (incluyendo el parámetro $\hbar$) se justifica matemáticamente. Duistermaat se interesó mucho en el *índice de Maslov* que aparece en fase estacionaria, y fue el primero en establecer una conexión entre el índice definido por Hörmander y el índice de Morse sobre el problema variacional.

3. Operadores elípticos y fase estacionaria

Poco después de su trabajo en operadores integrales de Fourier, Hans Duistermaat y Victor Guillemin empezaron a colaborar en un artículo, de importancia e impacto monumental, sobre la conexión entre el espectro de operadores elípticos positivos y las bicaracterísticas periódicas, usando la teoría de operadores integrales de Fourier [10]. Este artículo fue publicado en *Inventiones Mathematicae* en 1975. A día de hoy, está considerado un clásico y, bajo mi punto de vista, es el trabajo más importante de Duistermaat.

Duistermaat también hizo contribuciones importantes en análisis armónico, grupos de Lie, y espacios localmente simétricos. Resulta imprescindible mencionar su artículo con Gert Heckman sobre la variación de la clase de cohomología de la forma simpléctica en el espacio de fases reducido [12], otro clásico publicado en *Inventiones Mathematicae* en 1982.

Este trabajo dio lugar a la *fórmula de Duistermaat-Heckman*

$$\int_M e^{J_X}\, e^{\sigma} = \sum_j \int_{N_j} \frac{e^{i_j{}^* J_X}\, e^{i_j{}^*\sigma}}{\det \frac{LX+\Omega}{2\pi i}},$$

que es uno de los resultados más famosos en la historia de la geometría simpléctica y ha tenido una tremenda influencia en el desarrollo posterior de muchos temas en geometría y análisis. Michael Atiyah, que es miembro correspondiente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, citó este artículo como una de sus motivaciones fundamentales para su trabajo [2] con Raoul Bott sobre cohomología equivariante: «El teorema de Duistermaat-Heckman dice que la aproximación de la fase estacionaria es exacta para un hamiltoniano que surge de la acción del círculo en una variedad simpléctica compacta. Este es un teorema impactante, que además tiene una demostración sencilla y elegante. El teorema nos inspiró, a Raoul Bott y a mí, a estudiar la situación en detalle, y a explicar cómo se puede interpretar en términos de cohomología equivariante y fórmulas de puntos fijos. El teorema está relacionado también con el trabajo de Witten en teoría de Hodge-Morse. Conduce a muchos casos interesantes en el contexto de dimensión infinita, que aparecen en física cuántica. Todo esto tuvo un gran impacto».[1]

Años después de que Hans Duistermaat y Gert Heckman demostraran su teorema, Hans, en colaboración con Guillemin, Meinrenken y Wu, analizó el problema de commutación de la cuantización con la reducción simpléctica en [11], un importante artículo en la materia.

El libro clásico de Hans [8], publicado en 1996, consiste en una colección de notas personales sobre operadores de Dirac, el teorema del índice (demostrado mediante la ecuación del calor) y sobre cohomología equivariante, que Hans había escrito para su uso personal con el fin de entender mejor los progresos que, sobre esos temas, estaban teniendo lugar en esos momentos. Hans no tenía intención alguna de publicarlas, pero muchos colegas se lo pidieron y al final le convencieron. Hoy en día, esas notas son una referencia esencial del tema.

[1] Este texto es parte de una contribución que aparecerá en [22].

4. Acciones simplécticas, superficies elípticas y la ecuacion de Painlevé

En los últimos años, Hans Duistermaat trabajó fundamentalmente en tres proyectos. El primero, en colaboración conmigo, era sobre geometría diferencial simpléctica y sus conexiones con el trabajo de Kodaira sobre superficies analíticas complejas. Este proyecto resultó en cuatro artículos [17, 18, 20, 19], empezando por una clasificación de las acciones simplécticas de toros sobre variedades que tienen órbitas coisótropas. Daremos más detalles sobre este proyecto en la sección siguiente.

El segundo proyecto era sobre aplicaciones QRT (Quispel, Roberts and Thompson) y superficies elípticas, y dio lugar a un libro de unas seiscientas páginas [9] (su trabajo en este tema surgió tras una conversación con J. M. Tuwankotta). Se trata de un tratado completo y auto-contenido de la materia, analizando las aplicaciones QRT usando la teoría de Kodaira de superficies elípticas.

En los últimos meses de su vida Hans trabajó en la ecuación diferencial de Painlevé, con Nalini Joshi. Antes de su muerte, Hans había mejorado considerablemente los resultados conocidos sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Painlevé

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 6y^2 + x,$$

además de haber corregido, y completado, resultados previos. Esta ecuación diferencial es la primera en la clasificación de Painlevé de las ecuaciones diferenciales algebraicas de segundo orden tales que cada singularidad aislada de crecimiento moderado de cada solución es un polo.

A pesar de la apariencia simple que tiene la ecuación, el análisis de las soluciones es delicado, y requiere muchas estimaciones complicadas, que uno debe hacer para entender la geometría subyacente al problema. Painlevé pensó en 1900 que había demostrado que cada solución de la ecuación se podía extender a una función meromorfa en todo el x-plano complejo, pero las primeras demostraciones rigurosas no se dieron hasta casi cien años más tarde. Boutroux descubrió en 1913 una transformación a una ecuación diferencial aproximadamente autónoma, lo que le permitió llegar a conclusiones espectaculares sobre el comportamiento asintótico de la localización de los polos cerca del infinito en el plano complejo. Sus demostraciones tenían serios problemas y eran incompletas, pero sus conclusiones eran básicamente correctas, y se podían mejorar considerablemente.

La primera ecuación de Painlevé también se puede obtener como condición de compatibilidad entre dos sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias, unas en la variable x con un parámetro λ y las otras con los papeles de x y λ intercambiados. Esto se ha usado en el estudio de propiedades asintóticas de los primeros *transcendentes de Painlevé*, pero el análisis de Duistermaat no usa el así llamado método de isomonodromía. El artículo «Okamoto's space for the first Painlevé equation in Boutroux coordinates», con Nalini Joshi, disponible en el *Mathematics arXiv* desde el 27 de octubre de 2010, contiene resultados relacionados con este proyecto.

5. GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA DE SISTEMAS HAMILTONIANOS

En esta sección comentaré, con algo más de detalle, uno de los artículos sobre geometría diferencial simpléctica que Hans Duistermaat escribió en colaboración conmigo. El tema principal en que Hans y yo trabajamos juntos era la teoría de acciones simplécticas de toros (grupos abelianos de Lie, compactos y conexos) sobre variedades, y las relaciones de este tema con la geometría algebraica compleja y la teoría de Kodaira de superficies elípticas.

Nuestro trabajo estaba motivado por los trabajos seminales de Souriau [30] y Kostant [24] en los años 1960, y de Atiyah [1], Guillemin-Sternberg [21] y Delzant [4] en los años 1980, en el campo de la geometría de sistemas hamiltonianos. Probablemente, el ejemplo más sencillo de tal sistema hamiltoniano viene dado por la acción del toro uni-dimensional (es decir, el círculo) sobre la esfera unidad mediante rotaciones alrededor del eje de rotación vertical que pasa por los polos de la esfera; nos referimos a la figura 1 para ilustrar esta situación.

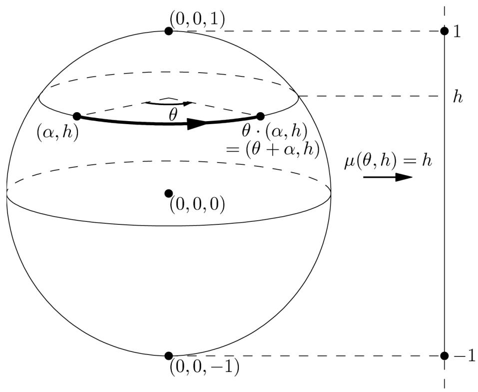


Figura 1: La aplicación momento en el caso de la esfera S^2 viene dada por la función $\mu(\theta,h)=h$. La imagen de S^2 bajo la aplicación momento μ es el intervalo cerrado $[-1,1]$, un politopo uni-dimensional.

A continuación damos una breve introducción a las variedades simplécticas y las acciones de toros sobre ellas. Una *forma simpléctica* sobre un espacio vectorial V es una aplicación bilinear, antisimétrica y no-degenerada $V\times V\to\mathbb{R}$. Una *variedad simpléctica* es un par (M,ω), en el cual M es una variedad diferenciable y ω es una forma simpléctica sobre M, es decir, una colección diferenciable de formas simplécticas ω_p, una por cada espacio tangente T_pM, que es globalmente cerrada en el sentido de que satisface la ecuación diferencial $\mathrm{d}\omega=0$.

El ejemplo más sencillo de variedad simpléctica viene dado, probablemente, por una superficie de género g equipada con una forma de área. Un ejemplo particularmente importante es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2n}$ equipado con la forma simpléctica $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}y_i$, donde $(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)$ son las coordenadas en $\mathbb{R}^{2n}$.

Las variedades simplécticas siempre tienen dimensión par, así que, por ejemplo, el círculo S^1 y la 3-esfera S^3 no admiten una estructura simpléctica. También son orientables porque, si la dimensión de M es $2n$, la forma de volumen $\omega^n = \omega \wedge \ldots$ (n veces) $\ldots \wedge \omega$ proporciona una orientación. Así que, por ejemplo, la botella de Klein no es una variedad simpléctica. Además, las variedades simplécticas son topológicamente no triviales, en el sentido de que si M es una variedad compacta, entonces los grupos pares de cohomología de de Rham de M son todos no triviales, ya que $[\omega^k] \in \mathrm{H}^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ es una clase de cohomología distinta de la trivial siempre que $k \leq n$, es decir, la forma diferencial ω^k es cerrada pero no es exacta (la demostración de esto usa el teorema de Stokes, y no es del todo inmediata). Por lo tanto, las esferas S^4, S^6, S^8, $\ldots, S^{2N}, \ldots$ no pueden admitir una forma simpléctica.

Las variedades simplécticas fueron clasificadas localmente, por Darboux [3], a finales del siglo XIX. En concreto, Darboux demostró que, cerca de cada punto en una variedad (M, ω) de dimensión $2n$, se pueden encontrar coordenadas $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ en las que la forma simpléctica ω tiene la expresión

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i.$$

Como consecuencia del teorema de Darboux se tiene que las variedades simplécticas no tienen invariantes locales, con la excepción de la dimensión de la variedad. Este hecho constituye una diferencia esencial con la geometría riemanniana, donde la curvatura en un invariante local.

Un campo de vectores $\mathcal{Y}$ en una variedad simpléctica (M, ω) es *simpléctico* si su flujo preserva la forma simpléctica ω, y es *hamiltoniano* si el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\omega(\mathcal{Y}, \cdot) = \mathrm{d}H \qquad \text{(EDP de Hamilton)}$$

tiene una solución diferenciable global $H\colon M \to \mathbb{R}$. En este caso, usamos la notación $\mathcal{Y} := \mathcal{H}_H$, y llamamos a H el *hamiltoniano*, o la *función energía*.

Por ejemplo, el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial \theta}$ sobre el toro $\mathbb{T}^2 := (S^1)^2$ es simpléctico pero no es hamiltoniano (en este caso θ es la coordenada en la primera copia de S^1 en el toro $\mathbb{T}^2$, por ejemplo); por otro lado, el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial \theta}$ sobre la esfera S^2 es hamiltoniano: $\frac{\partial}{\partial \theta} = \mathcal{H}_H$ con $H(\theta, h) := h$ (en este caso (θ, h) representa un punto en la esfera unidad S^2 con altura h, donde la altura se mide desde el plano horizontal $z = 0$, y ángulo θ, que se mide horizontalmente con respecto al eje vertical, como en la figura 1).

Supongamos que tenemos coordenadas locales de Darboux $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ cerca de un punto $m \in M$. Sea

$$\gamma(t) := (x_1(t), y_1(t), \ldots, x_n(t), y_n(t))$$

una curva integral de un campo de vectores diferenciable $\mathcal{Y}$. Entonces $\mathcal{Y} = \mathcal{H}_H$ para una función diferenciable H localmente definida si y sólo si

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(\gamma(t)), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}(\gamma(t)). \end{cases}$$

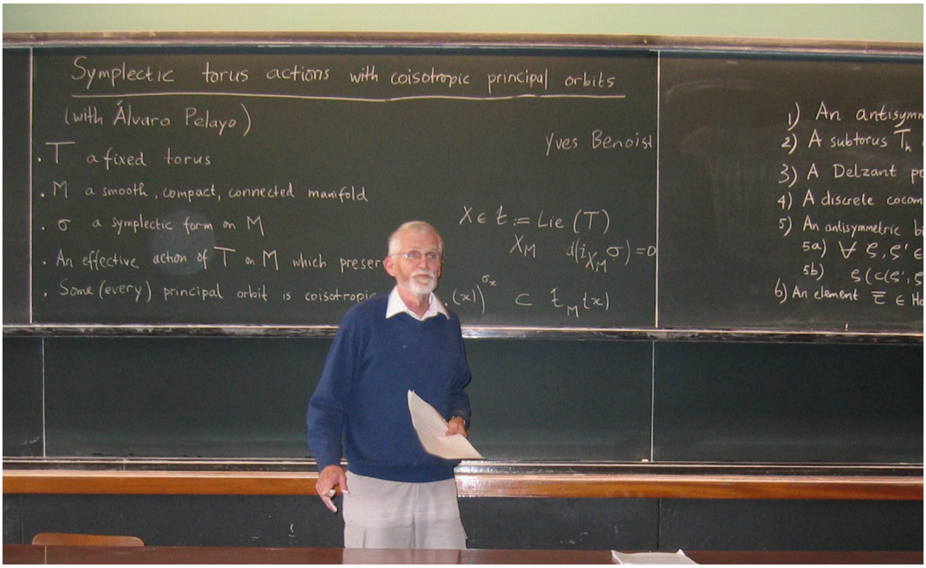
Siempre es cierto que $H(\gamma(t))$ es constante, es decir, que la energía se conserva por el movimiento (principio de Noether). Si $\mathcal{Y}$ es simpléctico, estas ecuaciones siempre tienen una solución local, pero para que el campo de vectores sea hamiltoniano (globalmente), se tiene que cumplir que $\mathcal{Y} = \mathcal{H}_H$ en M, es decir, la función H tiene que ser la misma en cada sistema de coordenadas de Darboux. Desde un punto de vista más abstracto, esto quiere decir que la forma $\omega(\mathcal{Y}, \cdot)$ siempre es localmente exacta, pero no es necesariamente globalmente exacta. Por lo tanto la obstrucción a ser exacta está en $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(M)$, el primer grupo de cohomología de de Rham de M; si este grupo es trivial, entonces todos los campos de vectores diferenciables que son simplécticos son también hamiltonianos.

Ahora supongamos que tenemos un toro $T \simeq \mathbb{T}^k := (S^1)^k$, es decir, un grupo de Lie que es conexo, compacto y abeliano. Sea $X \in \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ un elemento del álgebra de Lie de T (es decir, pensamos en X como un vector tangente a la identidad 1 en el grupo T). Para cada tal X existe un único homomorfismo $\alpha_X \colon \mathbb{R} \to T$ tal que $\alpha_X(0) = 1$ y $\alpha'_X(0) = X$. De esta forma podemos definir la llamada *función exponencial* $\exp\colon \mathfrak{t} \to T$ mediante la condición $\exp(X) := \alpha_X(1)$. Usando la función exponencial podemos generar, a partir de cualquier acción de un toro sobre la variedad M, muchos campos de vectores sobre dicha variedad. Concretamente, para cada $X \in \mathfrak{t}$, definimos el campo de vectores $\mathcal{G}(X)$ sobre M *generado por la acción del toro* T a partir de X,

$$\mathcal{G}(X)_p := \text{vector tangente a} \quad \underbrace{t \mapsto \overbrace{\exp(tX)}^{\text{curva en } T} \cdot p}_{\text{curva en } M \text{ a través de } p} \quad \text{en } t = 0.$$

Una acción del toro T sobre (M, ω) es *simpléctica* si todos los campos de vectores que genera son simplécticos, es decir, sus flujos preservan la forma simpléctica ω. La acción del toro T es *hamiltoniana* si todos los campos de vectores que genera son hamiltonianos, es decir, satisfacen las EDP de Hamilton. Cualquier acción simpléctica en una variedad simplemente conexa es hamiltoniana, pues el primer grupo de cohomología de de Rham es trivial en este caso.

Partiendo de una acción hamiltoniana de un toro, se puede construir un tipo especial de aplicación —la famosa *aplicación momento*— que codifica, por así decir, información sobre la propia acción, la variedad y la forma simpléctica. La construcción de la aplicación momento se debe a Kostant y a Souriau, y se puede definir con un alto nivel de generalidad para acciones de grupos de Lie que no son necesariamente toros. La aplicación momento fue una herramienta clave en las célebres notas sobre cuantización de Kostant, y Souriau a su vez la explicó y comentó con gran detalle en su libro. En lo que sigue, sólo presento la construcción de la aplicación



Hans Duistermaat impartiendo una conferencia sobre acciones de toros en variedades simplécticas. Esta foto fue tomada por M. Pignon en el Congreso en honor del matemático francés Yves Colin de Verdière, celebrado en el año 2006.

momento en el caso particular en que el grupo de Lie es un toro, caso en que la construcción es más sencilla.

Supongamos que el toro T tiene dimensión m y que la variedad simpléctica M, sobre la que actúa T, tiene dimension $2n$. Supongamos además que $e_1, \ldots, e_m$ constituyen una base del álgebra de Lie $\mathfrak{t}$ del toro T. Sean $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m$ los campos de vectores correspondientes, que uno obtiene usando la función exponencial tal y como dijimos anteriormente. Se sigue de la definición de acción hamiltoniana que existe un único (salvo constantes) hamiltoniano H_i tal que $\omega(\mathcal{E}_i, \cdot) = \mathrm{d}H_i$, es decir, $\mathcal{E}_i = \mathcal{H}_{H_i}$. Entonces, podemos definir la *aplicación momento* como

$$\mu := (H_1, \ldots, H_m)\colon M \to \mathbb{R}^m.$$

Esta aplicación μ es única, salvo composición con un elemento del grupo general lineal $\mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ (porque nuestra construcción depende de la base que elegimos) y traslaciones en $\mathbb{R}^m$ (porque los hamiltonianos están definidos salvo constantes).

Atiyah y Guillemin-Sternberg demostraron alrededor de 1982, de forma independiente, una propiedad espectacular de la aplicación momento: si un toro de dimensión m actúa en una variedad simpléctica compacta y conexa de dimensión $2n$, y dotada de una acción hamiltoniana, la imagen de la aplicación momento correspondiente

$$\mu(M) = \Big\{ \mu(p) \mid p \in M \Big\} = \Big\{ (H_1(p), \ldots, H_m(p)) \mid p \in M \Big\} \subset \mathbb{R}^m,$$

que a priori no es más que un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$, es, sin embargo, en todos los casos, un politopo convexo. Este resultado, conocido como teorema de Atiyah-

Guillemin-Sternberg, ha tenido una gran influencia en el desarrollo de la geometría simpléctica. En particular, ha sido un propulsor y una inspiración para numerosos trabajos en el contexto de la teoría de acciones de grupos de Lie (hamiltonianas o no), y de la teoría de sistemas hamiltonianos completamente integrables.

Por ejemplo, el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ equipado con la forma simpléctica de Fubini-Study multiplicada por una constante λ,

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{\lambda}{2(\sum_{i=0}^n \bar{z}_i z_i)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j \neq k} (\bar{z}_j z_j \, \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\bar{z}_k - \bar{z}_j z_k \, \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_k),$$

y con la acción habitual por rotaciones del toro estándar de dimension n (el ejemplo más sencillo de esto es $\mathbb{CP}^1 = S^2$, al que ya nos hemos referido en la figura 1) dada por

$$(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta_n}) \cdot [z_0 : \ldots : z_n] = [z_0 : \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta_1} z_1 : \ldots : \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta_n} z_n],$$

tiene como aplicación momento la función $\mu \colon \mathbb{CP}^n \to \mathbb{R}^n$ definida mediante

$$\mu(z) = \left(\frac{\lambda \, |z_1|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2}, \ldots, \frac{\lambda \, |z_n|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2} \right).$$

Se sigue de esta fórmula que el politopo correspondiente viene dado por la envolvente convexa de 0 y los múltiplos $\lambda e_1, \ldots, \lambda e_n$ de los vectores canónicos en $\mathbb{R}^n$, que aparecen en la figura 2.

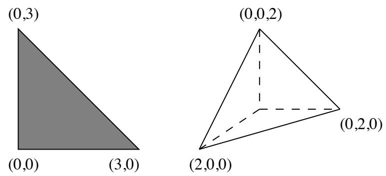


Figura 2: Politopos correspondientes a la imagen de la aplicación momento en los espacios projectivos complejos $\mathbb{CP}^2$ y $\mathbb{CP}^3$ equipados con la forma estándar de Fubini-Study multiplicada por una constante.

Poco después de que Atiyah y Guillemin-Sternberg demostraran su teorema, sobre 1986, Delzant demostró que, si $m = n$, este politopo caracteriza completamente la variedad simpléctica y la acción del toro. Para más detalles remito a las secciones 2.3 y 2.4 de [28] y a [29].

El caso en que la acción del toro es simpléctica pero *no* necesariamente hamiltoniana seguía constituyendo un misterio, en el sentido de que apenas se conocían sus propiedades generales, y no estaba claro si se podrían describir. Duistermaat y yo nos interesamos por este tema y trabajamos durante meses en extender el teorema de Delzant a variedades simplécticas cuando la acción del toro no era necesariamente hamiltoniana, pero satisfacía la propiedad de tener una órbita lagrangiana (o, más generalmente, coisótropa). Un ejemplo famoso de este caso es la llamada variedad de Kodaira-Thurston, que tiene dimensión cuatro.

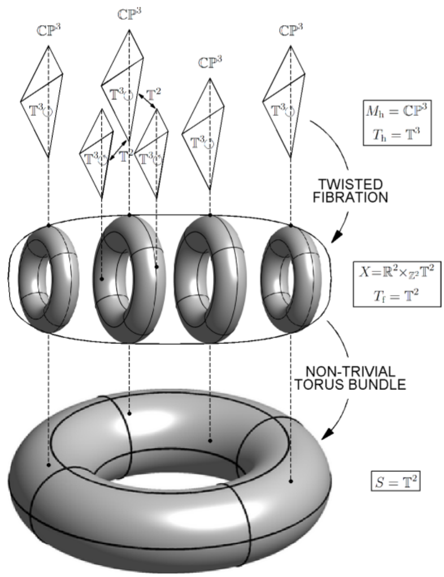


Figura 3: Variedad simpléctica de dimensión 10 con una acción de un toro con órbitas lagrangianas.

Hay muchos ejemplos más (de hecho, un *espacio de moduli* enorme), y todos ellos encajan en el siguiente teorema que demostramos [17] a finales del año 2005: supongamos que un toro de dimension m actúa sobre una variedad compacta y conexa M de dimensión $2m$, y que alguna de las órbitas de esta acción es lagrangiana, es decir, la forma simpléctica se anula sobre ella. Entonces, el toro se descompone en un producto (que no es único) de dos toros T_{h} y T_{f}, el primero de los cuales actúa sobre la variedad de forma hamiltoniana, mientras que el segundo actúa de forma libre (es decir, los grupos de isotropía de la acción son todos triviales), y uno obtiene, tal como ilustra la figura 3, una fibración de dos niveles

$$M \to X \to S,$$

en la cual la variedad M es el espacio total de esta fibración sobre X, cuyas fibras son variedades tóricas simplécticas M_{h} sobre las que el toro T_{h} actúa de forma hamiltoniana, dejándolas invariantes (el toro libre actúa permutando las fibras). El espacio X es una T_{f}-fibración sobre un toro S de dimension $m - \dim T_{\mathrm{h}}$. En este teorema que acabamos de mencionar, el espacio X es una variedad simpléctica homogénea con respecto a cierto grupo.

Para los detalles referimos al lector a [17, teoremas 9.4 y 9.6], donde dimos una clasificación completa (es decir, también demostramos una versión del recíproco de este resultado, que es el equivalente al teorema de Delzant, pero en este contexto más general que incluye acciones no hamiltonianas). Después, usando el trabajo de Kodaira [23] sobre superficies complejas analíticas, demostramos varios teoremas

Alan Weinstein, considerado uno de los padres fundadores de la geometría simpléctica, y Hans Duistermaat. Hans y Alan eras amigos desde los años 1970, cuando Hans paso un semestre sabático en Berkeley. Esta foto fue tomada por Marius Crainic en la defensa de una tesis doctoral en Utrecht en 2009.

referentes a la existencia de estructuras complejas invariantes en las variedades de nuestra clasificación, que se explican en [20, 28].

Animados y ayudados por P. Deligne, que había leído el artículo con detenimiento y sugerido varios cambios, pudimos expresar estos teoremas de forma condensada, en términos de teoría de categorías. Los teoremas formulados en términos de teoría categorías aparecen también en nuestro artículo [17].

6. Breve reseña biográfica

Hans Duistermaat nació el 20 de diciembre de 1942 en La Haya. Acabada la Segunda Guerra Mundial, sus padres se trasladaron a lo que actualmente es Indonesia, y allí pasó su juventud. Estudió en la Universidad de Utrecht, donde posteriormente escribió su tesis doctoral sobre estructuras matemáticas en termodinámica. De acuerdo con el *Mathematics Geneaology Project*, Hans Duistermaat tuvo 24 estudiantes de doctorado y, a día de hoy, 96 matemáticos descienden de él. Varios de sus estudiantes ocupan ahora prestigiosos puestos como investigadores en centros y universidades de todas las partes del mundo.

Hans ocupaba desde 1974 la prestigiosa Cátedra de Matemática Pura y Aplicada en Utrecht, cuyo anterior titular había sido el eminente topólogo Hans Freudenthal (1905–1990). Aunque oficialmente jubilado desde 2007, Duistermaat continuó desarrollando su actividad investigadora con normalidad hasta su inesperada muerte. Durante los cinco últimos años de su carrera ocupó la famosa Cátedra KNAW de la Real Academia Holandesa de Ciencias, lo que le permitió dedicarse de forma completa a la investigación, sin tener ninguna obligación docente o administrativa. También era Caballero de la Orden del León Holandés (*Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw*), y recibió numerosos premios y distinciones. Hans Duistermaat falleció el 19 de marzo de 2010 en Holanda, a la edad de 67 años, tras una breve pero intensa crisis provocada por el resurgimiento repentino de un linfoma maligno, que los médicos pensaban estaba controlado.

Además de artículos de investigación, Hans escribió once libros, que cubren un gran espectro de temas y con diferentes niveles de sofisticación. Sus libros tienen la característica común de que todos los problemas presentados se explican en su contexto original. Siempre que escribía, insistía en que los trabajos originales de nuestros antepasados matemáticos se deben citar, y explicar, correctamente.

Era una persona de naturaleza modesta, tanto a nivel humano como profesional. No prestaba atención a los honores o reconocimientos, de los cuales recibió muchos a lo largo de su carrera, pero cuando los recibía siempre se sorprendía y mostraba su agradecimiento.

Hans se sintió abrumado cuando se le pidió que participase en el Jurado de las Medallas Fields de 1998; quería rechazar esta tarea, pues encontraba muy difícil tener que seleccionar sólo cuatro de entre tantos jóvenes matemáticos brillantes como había. Pero aceptó finalmente ser miembro de tan distinguido jurado, pues siempre antepuso sus servicios a la comunidad matemática a sus preferencias personales.

La modestia de Hans sólo era comparable a su honestidad científica. Pensaba, y solía decir, que la mayoría de las llamadas «nuevas ideas» se podían remontar a los trabajos de nuestros antepasados matemáticos. La pasión de Hans por la historia le llevó a estudiar, una y otra vez, los trabajos de Lie, Cartan, Poincaré, e incluso de Huygens y Newton, a quienes leía sin dificultad en su lengua original. Atiyah dijo de Hans: «era un investigador que conocía y apreciaba los trabajos de nuestros antepasados matemáticos, pero también tenía una perspectiva moderna, que le llevó a usar el análisis microlocal para romper barreras».[2]

Remito a los lectores a [22] para una biografía más extensa.

7. Conclusión

El lector no debe sacar la impresión de que las únicas contribuciones de Hans Duistermaat son las que he comentado. Duistermaat hizo muchas otras aportaciones a la geometría y al análisis que no he tratado en este artículo. Siempre tenía motivaciones profundas para trabajar en todos los temas que abordó.

[2]Texto original en [22].

Hans Duistermaat y Álvaro Pelayo en la residencia familiar de los Duistermaat en 2005. Foto tomada por Saskia Duistermaat.

Muchas de sus motivaciones venían de la mecánica clásica, por la que sentía una profunda pasión. Tenía predilección por los sistemas hamiltonianos. Su artículo de 1980 sobre la globalización de coordenadas acción-ángulo [6], todavía se considera como el mejor artículo en la materia, e inspiró a muchos investigadores, entre los que me incluyo.

Sus trabajos en reducción simpléctica se originan en su comprensión profunda de las órbitas periódicas en sistemas hamiltonianos, y sus trabajos sobre curvas elípticas están en gran medida motivados por la teoría de sistemas hamiltonianos completamente integrables y la teoría de fibraciones lagrangianas.

Hans poseía una combinación poco usual de talentos: frecuentemente estaba motivado por problemas de las ciencias «aplicadas», pero al mismo tiempo era un maestro en muchas técnicas matemáticas altamente sofisticadas. Como sus contribuciones demuestran, era capaz de usar, una y otra vez, su comprensión de ejemplos concretos y clásicos para hacer descubrimientos teóricos.

No se puede ignorar tampoco su talento como profesor y pedagogo. Por ejemplo, escribió dos volúmenes fabulosos sobre análisis real con su colaborador y antiguo estudiante Kolk [15]. Su libro sobre operadores integrales de Fourier [7] es una referencia estándar en este campo, y el que escribió sobre *Spin-c* es un tratamiento excelente para los que quieren iniciarse en la materia. Su texto [14] sobre grupos de

Lie, escrito también con Kolk y publicado recientemente, va ya camino de convertirse en un clásico. Animo a los lectores a coger un libro de Duistermaat y comprobar por sí mismos la exquisitez de la exposición.

Duistermaat está considerado un genio del análisis geométrico, y espero que estas páginas sirvan para mostrar un poco el extraordinario impacto que han tenido sus trabajos en las matemáticas del siglo XX.

Referencias

[1] M. Atiyah, Convexity and commuting Hamiltonians, *Bull. London Math. Soc.* **14** (1982), 1–15.

[2] M. F. Atiyah y R. Bott, The moment map and equivariant cohomology, *Topology* **23** (1) (1984), 1–28.

[3] G. Darboux, Sur le problème de Pfaff, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. **6** (1882), no. 1, 14–36 y 49–68.

[4] T. Delzant, Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment, *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), 315–339.

[5] J. J. Duistermaat, Oscillatory integrals, Lagrange immersions and singularities of unfoldings, *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), 207–281.

[6] J. J. Duistermaat, On global action-angle variables, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), 687–706.

[7] J. J. Duistermaat, *Fourier Integral Operators*, Progress in Mathematics **130**, Birkhäuser Boston, 1996. Reedición: Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, 2011.

[8] J. J. Duistermaat, *The heat kernel Lefschetz fixed point formula for the spin-c Dirac operator*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **18**, Birkhäuser, 1996.

[9] J. J. Duistermaat, *Discrete Integrable Systems: QRT Maps and Elliptic Surfaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2010.

[10] J. J. Duistermaat y V. Guillemin, The spectrum of positive elliptic operator and periodic bicharacteristics, *Invent. Math.* **29** (1975), 39–79.

[11] J. J. Duistermaat, V. Guillemin, E. Meinrenken y S. Wu, Symplectic reduction and Riemann-Roch for circle actions, *Math. Res. Lett.* **2** (3) (1995), 259–266.

[12] J. J. Duistermaat y G. J. Heckman, On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space, *Invent. Math.* **69** (1982), 259–268.

[13] J. J. Duistermaat y L. Hörmander, Fourier integral operators. II, *Acta Math.* **128** (1972), 183–269.

[14] J. J. Duistermaat y J. A. C. Kolk, *Lie groups*, Universitext, Springer-Verlag, 2000.

[15] J. J. Duistermaat y J. A. C. Kolk, *Multidimensional real analysis. I. Differentiation*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **86**, Cambridge University Press, 2004.

[16] J. J. Duistermaat y J. A. C. Kolk, *Multidimensional real analysis. II. Integration*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **87**, Cambridge University Press, 2004.

[17] J. J. Duistermaat y Á. Pelayo, Symplectic torus actions with coisotropic principal orbits, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **57** (2007), 2239–2327.

[18] J. J. Duistermaat y Á. Pelayo, Reduced phase space and toric variety coordinatizations of Delzant spaces, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* **146** (2009), 695–718.

[19] J. J. Duistermaat y Á. Pelayo, Topology of symplectic torus actions with symplectic orbits, *Rev. Mat. Complut.* **24** (2011), 59–81.

[20] J. J. Duistermaat y Á. Pelayo, Complex structures on 4-manifolds with symplectic 2-torus actions, *Internat. J. Math.* **22** (2011), 449–463.

[21] V. Guillemin y S. Sternberg, Convexity properties of the moment mapping, *Invent. Math.* **67** (1982), 491–513.

[22] V. Guillemin, S. S. Vũ Ngọc, Á. Pelayo y A. Weinstein, Remembering Johanness (Hans) J. Duistermaat (1942–2010), aparecerá en *Notices Amer. Math. Soc.*

[23] K. Kodaira, On the structure of compact analytic surfaces, I. *Amer. J. Math.* **86** (1964), 751–798.

[24] B. Kostant, Orbits, symplectic structures and representation theory, *Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry* (Kyoto, 1965), Nippon Hyoronsha, Tokyo, 1966.

[25] Á. Pelayo, Symplectic actions of 2-tori on 4-manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **204** (2010), no. 959.

[26] Á. Pelayo y S. Vũ Ngọc, Semitoric integrable systems on symplectic 4-manifolds, *Invent. Math.* **177** (2009), 571–597.

[27] Á. Pelayo y S. Vũ Ngọc, Constructing integrable systems of semitoric type, *Acta Math.* **206** (2011), 93–125.

[28] Á. Pelayo y S. Vũ Ngọc, Symplectic theory of completely integrable Hamiltonian systems, aparecerá en *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*.

[29] F. Presas Mata, Entrevista a Álvaro Pelayo, Premio José Luis Rubio de Francia 2009, *La Gaceta de la RSME* **13** (2010), Núm. 4, 613–619.

[30] J. P. Souriau, *Structure des Systèmes Dynamiques*, Dunod, Paris, 1970. Traducción al inglés (editada y con un prefacio de R. H. Cushman y G. M. Tuynman): *Structure of dynamical systems: A symplectic view of physics*, Progress in Mathematics **149**, Birkhäuser Boston, 1997.

Álvaro Pelayo, School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton, NJ 08540 (USA), y Washington University, Mathematics Department, One Brookings Drive, Campus Box 1146, St Louis, MO 63130-4899 (USA)

Correo electrónico: `apelayo@math.ias.edu`, `apelayo@math.wustl.edu`